Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 4

1. *(4 Punkte)* Diese Aufgabe bezieht sich auf den Stoff der Vorlesung Analysis II.

a) Beweisen Sie den folgenden *Mittelwertsatz der Integralrechnung* im $\mathbb{R}^n$: Ist $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ stetig und $B \subset \mathcal{O}$ ein abgeschlossener Ball, so existiert ein Punkt $p \in B$ mit

$$f(p) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)} \int_B f(x)dx.$$

b) Welche Eigenschaften von B haben Sie in Ihrem Beweis benutzt, d.h. für welche allgemeineren Teilmengen $B \subset \mathcal{O}$ können Sie die Aussage auch folgern?

2. *(2 Punkte)* Beweisen Sie: Sind $u, v : \overline{B^2(0,r)} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\Delta u = \Delta v$ und gilt $u(x) \leq v(x)$, für alle $x \in \partial B^2(0,r)$, so folgt $u(x) \leq v(x)$ auf ganz $B^2(0,r)$.

3. *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass für jede Konstante $a > 0$ durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(\frac{z}{a})$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Diese nennt man *Katenoid*.

b) Überprüfen Sie, dass ein solches Katenoid durch $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$h(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} a\cosh(\frac{w_1}{a})\cos(w_2) \\ a\cosh(\frac{w_1}{a})\sin(w_2) \\ w_1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden kann, und wählen Sie zwei Teilmengen W_1 und W_2 in $\mathbb{R}^2$ aus, so dass die Einschränkungen von h auf W_1 und W_2 zwei Karten im Sinne der Vorlesung definieren, deren Bilder das gesamte Katenoid überdecken.

Bitte wenden!

4. *(4 Punkte)* Beweisen Sie, dass die Menge

$$TS^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x\rangle = 1, \langle x, v\rangle = 0\}$$

aller Tangentialvektoren an die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine 4-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$ ist. Hier bezeichnet $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

5. *(* **Zusatz**, *0 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom der Form $f(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ ohne doppelte Nullstelle, und sei

$$\Sigma := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid w^n - f(z) = 0\}.$$

Beweisen Sie, dass mit der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ die Menge $\Sigma \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.
Bemerkung: Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte Riemannsche Fläche, und auch für eine 1-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^2$ (die wir allerdings beide in dieser Vorlesung nicht betrachten). Die Funktion $G : \Sigma \to \mathbb{C}$, $G(z, w) = w$ erfüllt die Gleichung $G(z, w)^n = f(z)$, d.h. auf der Fläche Σ besitzt die Funktion f eine wohldefinierte n-te Wurzel.