Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 3

1. *(4 Punkte)* Bestimmen Sie Formen $\alpha_i \in \Omega^{i-1}(\mathbb{R}^3)$ mit $d\alpha_i = \omega_i$, wobei

a) $\omega_1 = (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz$, und

b) $\omega_2 = 2xz\,dy \wedge dz - dx \wedge dz - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy$.

2. *(6 Punkte)* Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale!

a)

$$\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

für $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1], y = x^2\}$, mit $(-1,1)$ als Startpunkt.

b)

$$\int_C \sin(y)\,dx + \sin(x)\,dy,$$

wobei C die Verbindungsstrecke von $(0,\pi)$ nach $(\pi,0)$ im $\mathbb{R}^2$ ist.

c)

$$\int_{C_\pm} \frac{1}{x^2+y^2}(x\;dy - y\,dx),$$

wobei $C_\pm \subset \mathbb{R}^2$ der obere bzw. untere Halbkreis des Einheitskreises $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ sein soll, und zwar jeweils von $(1,0)$ nach $(-1,0)$ durchlaufen.

3. *(3 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Zwei glatte Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathcal{O}$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) =: x_0$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) =: x_1$ heissen *homotop relativ zu den Endpunkten*, falls es eine glatte Abbildung $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathcal{O}$ gibt, so dass

$$\Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(t,1) = \gamma_1(t), \quad \Gamma(0,s) = x_0 \quad \text{und} \quad \Gamma(1,s) = x_1.$$

a) Beweisen Sie: Ist $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{O})$ geschlossen und sind γ_0 und γ_1 zwei parametrisierte Kurven in $\mathcal{O}$, die homotop relativ zu ihren Endpunkten sind, so gilt

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

Bitte wenden!

b) Sind die Kurven $\gamma_0(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ und $\gamma_1(t) = (\cos(\pi t), -\sin(\pi t))$ homotop relativ zu den Endpunkten in $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

4. *(6 Punkte)* Seien $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ der durch

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi s)\sin(\pi t) \\ \sin(2\pi s)\sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

gegebene 2-Würfel und

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

a) Beschreiben Sie die Bildmenge $f([0,1]^2)$.

b) Bestimmen Sie den Rand $\partial f \in \mathcal{C}_1(\mathbb{R}^3)$.

c) Bestimmen Sie $d\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

d) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_f \omega$.

e) Gibt es eine 3-Kette $c : [0,1]^3 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\partial c = f$?

f) Gibt es eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $d\alpha = \omega$?