Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 2

1. *(4 Punkte)* Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ betrachten wir die 1-Formen

$$\alpha_1 := \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 := x\,dx + y\,dy.$$

a) Rechnen Sie nach, dass beide Formen geschlossen sind!

b) Sei nun $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Polarkoordinatenabbildung $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Bestimmen Sie $f^*(\alpha_1)$ und $f^*(\alpha_2)$!

2. *(6 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, V ein Vektorfeld auf $\mathcal{O}$ und $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$. Durch "Einsetzen von V als erstes Argument" erhalten wir aus ω eine $(k-1)$-Form $i_V\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{O})$:

$$i_V\omega(p)((p,v_1),\ldots,(p,v_{k-1})) := \omega(p)(V(p),(p,v_1),\ldots,(p,v_{k-1})).$$

Beweisen Sie:

a) Für $V = \frac{\partial}{\partial x^j}$ und $\omega = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ gilt

$$i_V\omega = \begin{cases} (-1)^{s-1} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_s}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} & \text{falls } j = i_s \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) $i_V(\omega \wedge \eta) = (i_V\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_V\eta)$, falls $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$.

Sei nun $\mu = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega^n(\mathcal{O})$ die Standard-n-Form. Jede andere n-Form hat die Gestalt $f \cdot \mu$ für eine geeignete Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Also wird für jedes glatte Vektorfeld V auf $\mathcal{O}$ durch die Gleichung

$$d(i_V\mu) = f_V \cdot \mu$$

eine glatte Funktion $f_V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ definiert, welche wir die *Divergenz von V* nennen und mit $\operatorname{div}(V)$ bezeichnen. Beweisen Sie:

Bitte wenden!

c) Ist $V = \sum_{j=1}^n V^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, so gilt

$$\operatorname{div}(V) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V^j}{\partial x^j}.$$

d) Ist $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gilt

$$\operatorname{div}(h \cdot V) = h \cdot \operatorname{div}(V) + dh(V)$$

und

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} h) = \Delta h,$$

wobei $\operatorname{grad} h$ der Gradient von h und $\Delta : C^\infty(\mathcal{O}) \to C^\infty(\mathcal{O})$ der Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}$ ist.

e) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes

$$V = \frac{1}{\|x\|^n} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

3. *(6 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ offen und $V = V^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + V^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + V^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ ein glattes Vektorfeld auf $\mathcal{O}$. Wir definieren dessen *Rotation* $\operatorname{rot}(V)$ als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(V) := \left(\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Beweisen Sie:

a) Definiert man die 1-Form $\beta_V \in \Omega^1(\mathcal{O})$ als

$$\beta_V = V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3,$$

so gilt

$$d\beta_V = i_{\operatorname{rot}(V)}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3).$$

b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) = 0$.

c) Ist $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gelten

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} h) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(h \cdot V) = h \cdot \operatorname{rot}(V) + (\operatorname{grad} h) \times V,$$

wobei $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

d) Ist $\mathcal{O}$ sternförmig und ist $\operatorname{rot}(V) = 0$, so existiert eine glatte Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit $V = \operatorname{grad} f$.

e) Ist $\mathcal{O}$ sternförmig und ist $\operatorname{div}(V) = 0$, so existiert ein Vektorfeld W auf $\mathcal{O}$ mit $\operatorname{rot}(W) = V$.