Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 12

1. *(4 Punkte)* Bestimmen Sie

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx \text{ !}$$

Hinweis: Dies ist eine Aufgabe zum Thema Hilbert-Räume.

2. *(4 Punkte)* Seien $(E, \|\,.\,\|_E)$ und $(F, \|\,.\,\|_F)$ Banach-Räume, und sei $U \subset E$ offen. Eine Abbildung $\Phi : U \to F$ heisst *differenzierbar in* $x_0 \in E$, falls eine **stetige**[1] lineare Abbildung $L : E \to F$ existiert, so dass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - L(x - x_0)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = 0.$$

In diesem Fall nennt man L die Ableitung von Φ im Punkt $x_0 \in E$ und schreibt dafür $D\Phi_{x_0}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P : C([0,1]) \to C([0,1])$, $P(f) = f^4$, d.h. $P(f)(t) = (f(t))^4$ in jedem Punkt $f_0 \in C([0,1])$ differenzierbar ist, wenn $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm betrachtet wird!

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $Q : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$Q(f) = \|f\|_2^2 = \int_0^1 (f(t))^2 dt$$

in jedem Punkt $f_0 \in L^2([0,1])$ differenzierbar ist!

[1] In endlich-dimensionalen Räumen ist die Stetigkeit von linearen Abbildung automatisch, während sie in unendlich-dimensionalen Räumen eine wesentliche zusätzliche Bedingung darstellt.

Bitte wenden!

3. *(4 Punkte)* Für $h > 0$ betrachten wir die Abbildung $T_h : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$,

$$T_h(f)(t) := f(t+h).$$

a) Beweisen Sie

$$\lim_{h\to 0} \|T_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \tag{1}$$

für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

b) Benutzen Sie die Dichtheit von $C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ und die Dreiecksungleichung, um die L^1-Konvergenz (1) für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ zu zeigen!

4. *(Zusatz, 0 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, so ist die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt \quad \left(= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt \right)$$

wohldefiniert (d.h. das Integral existiert und ist endlich), stetig und beschränkt. Man nennt $f * g$ die *Faltung* von f und g.

b) Sei nun $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Teilmenge mit positivem Maß $\ell(E) > 0$. Zeigen Sie, dass dann die Menge $E - E := \{x - y \mid x, y \in E\} \subset \mathbb{R}$ eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ enthält!
Hinweis: Wenden Sie Teil **a)** *auf* $\chi_E * \chi_{-E}$ *an, wobei* $-E = \{-x \mid x \in E\}$*!*