Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 11

1. *(3 Punkte)* Sei $E = C^1([0,1])$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Ist E mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

ein Banach-Raum?

2. *(5 Punkte)* Sei $(E, \|\,.\,\|)$ ein reeller normierter Raum.

a) Zeigen Sie, dass genau dann ein Skalarprodukt $(\,.\,,\,.\,)$ in E mit $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ existiert, falls die Norm $\|\,.\,\|$ die Parallelogrammgleichung

$$\forall x, y \in E: \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

erfüllt!
Hinweis: Gilt die Gleichung, so lässt sich leicht eine Formel für ein Skalarprodukt "raten". Um zu zeigen, dass dieses tatsächlich linear in beiden Faktoren ist, kann als Zwischenschritt der Beweis der Formel $(x,y_1)+(x,y_2) = 2(x, \frac{y_1+y_2}{2})$ *hilfreich sein.*

b) Geben Sie Beispiele für normierte Räume, in denen die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt ist!

3. *(6 Punkte)* Wir betrachten $p, r \geq 1$. Beweisen Sie:

a) Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{p}} \ln^2(\frac{t}{2})}$$

liegt in $L^p([0,1])$, jedoch nicht in $L^r([0,1])$ für $r > p$.

b) Für $p > 1$ liegt die Funktion

$$g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}(1 + |\ln(t)|)}$$

in $L^p([0,\infty))$, aber nicht in $L^r([0,\infty))$ für $r \neq p$.

Bitte wenden!

c) Die Funktionenfolge

$$f_n(t) := \begin{cases} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln(n+1)} & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

konvergiert in $L^r([0,1])$ für $r \le p$, aber nicht in $L^r([0,1])$ für $r > p$.