Universität Hamburg
Janko Latschev Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 10

1. *(3 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, d.h. es existiere eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ gilt.
Zeigen Sie, dass f alle Lebesgue-Nullmengen auf Lebesgue-Nullmengen abbildet!

2. *(4 Punkte)*

a) Sei $A \subset [0,1]$ die Menge aller Zahlen $x \in [0,1]$, welche eine Dezimaldarstellung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}$$

mit $a_j \neq 3$ besitzen. Berechnen Sie dass Lebesgue-Maß $\ell(A)$!

b) Sei $C \subset [0,1]$ die Cantor–Menge. Berechnen Sie das Lebesgue–Integral $\int_0^1 f(t)dt$ der Funktion

$$f(t) := \begin{cases} t^4, & t \in C \\ \frac{1}{2^n}, & t \text{ liegt in einem Teilintervall der Länge } \frac{1}{3^n} \text{ von } [0,1] \setminus C \end{cases}.$$

3. *(6 Punkte)* Sei $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit positivem Lebesgue-Maß $\ell(A)$. Beweisen Sie:

a) Zu jeder Zahl $0 < \alpha < \ell(A)$ existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\ell((-\infty, a) \cap A) = \alpha$.

b) A enthält eine nicht Lebesgue-messbare Teilmenge.

c) Es existieren $x, y \in A$ mit $x - y \notin \mathbb{Q}$.

d) Ist außerdem A beschränkt, so existieren Zahlen $x, y \in A$ mit $x - y \in \mathbb{Q}$.

4. *(2 Punkte)* Konstruieren Sie eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,1]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0,$$

aber der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für kein $x \in [0,1]$ existiert!