Universität Hamburg
Janko Latschev

Winter 2012/13

Höhere Analysis

Serie 1 (Zur Erinnerung an Themen der Analysis II)

1. *(6 Punkte)* Entscheiden Sie für jede der folgenden Mengen, ob sie Untermannigfaltigkeiten des entsprechenden $\mathbb{R}^n$ bilden, und geben Sie in diesem Fall die Dimension und den Tangentialraum im Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ an:

a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 1, (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}\} \subset \mathbb{R}^3$.

c) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 x_2 = 0, 3x_1 = x_3^2 + x_4^2 + 3\} \subset \mathbb{R}^4$.

2. *(6 Punkte)* Finden Sie die maximalen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit der jeweils angegebenen Anfangsbedingung:

a) $t\dot{x} = x - te^{\frac{x}{t}}$, $x(e) = 0$

b) $\dot{x} + 2x = x^2 e^t$, $x(0) = 1$ *(Hinweis: Betrachten Sie $z(t) = \frac{1}{x(t)}$!)*

c) $2x\dot{x} \cdot \sin(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} - x^2 \cos(t)$, $x(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2\sqrt{2}}$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die erhaltenen Lösungen ableiten!

3. *(5 Punkte)* Wir hatten in der Analysis II gesehen, dass für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

die Form

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$$

besitzt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung (1) für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, indem Sie

Bitte wenden!

a) eine invertierbare Matrix B und Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ finden, so dass A die Form

$$A = B^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} B$$

besitzt, und

b) diese Darstellung dazu benutzen, das Exponential $e^{(t-t_0)A}$ zu bestimmen.

Skizzieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungen in der Nähe von $0 \in \mathbb{R}^2$.