UNIVERSITÄT HAMBURG
FB MATHEMATIK
J. LATSCHEV

WS 2012/2013
HÖHERE ANALYSIS

Beispiele zur Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten

Beispiel 1.
Die Teilmenge $N := \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2\}$ ist als Graph der Funktion $f(x,y) = x^2+y^2$ eine 2-dimensionale Untermanngifaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Wir wollen die Karte

$$h : \mathbb{R}^2 \to N, \quad h(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$$

als glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten $M = \mathbb{R}^2$ und $N \subset \mathbb{R}^3$ auffassen. Dann gilt nach Definition des Differentials für $q = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ und $p = h(u,v) = (u,v,u^2+v^2) \in \mathbb{R}^3$

$$h_* : T_q\mathbb{R}^2 \to T_pN, \quad h_*(q)((q,\mathbf{v})) = (p, Dh(q)(\mathbf{v})).$$

Wir haben als Matrix der Ableitung von h im Punkt $q = (u,v)$ bezüglich der Standardbasen (e_1,e_2) im $\mathbb{R}^2$ und (e_1', e_2', e_3') im $\mathbb{R}^3$

$$Dh(q) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(q) \;\; \frac{\partial h}{\partial v}(q)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u}$ und $\frac{\partial}{\partial v}$ auf $M = \mathbb{R}^2$ waren definiert als

$$\frac{\partial}{\partial u}(q) = (q, e_1), \quad \frac{\partial}{\partial v}(q) = (q, e_2),$$

(und analog $\frac{\partial}{\partial x}(p) = (p, e_1')$ usw. im $\mathbb{R}^3$), so dass

$$h_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{und} \quad h_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + 2v\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ausgeschrieben wäre das punktweise

$$\begin{aligned} h_*(q)\left(\frac{\partial}{\partial u}(q)\right) = h_*(q)((q,e_1)) &= (h(q), Dh(q)(e_1)) \\ &= \left(h(q), \frac{\partial h^1}{\partial u}(q)e_1' + \frac{\partial h^2}{\partial u}(q)e_2' + \frac{\partial h^3}{\partial u}(q)e_3'\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(h(q)) + 2u(q)\frac{\partial}{\partial z}(h(q)). \end{aligned}$$

Man beachte, dass in dieser Notation $\frac{\partial}{\partial x}(h(q))$ ein Tangentialvektor an $\mathbb{R}^3$ im Punkt $h(q)$, nämlich der Wert des Vektorfeldes $\frac{\partial}{\partial x}$ im Punkt $h(q)$ ist - es ist hier also keine partielle Ableitung im Spiel! Um solche Verwirrungen zu vermeiden, arbeitet man wenn möglich mit den Vektorfeldern. Eine oft benutzte Alternative wäre, den Fusspunkt als Index zu schreiben statt als Argument, also

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{h(q)} \quad \text{statt} \quad \frac{\partial}{\partial x}(h(q)).$$

In dieser Form wäre die obige Rechnung also

$$\begin{aligned} h_{*,q}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_q = h_{*,q}((q,e_1)) &= (h(q),(Dh)_q(e_1)) \\ &= \left(h(q), \frac{\partial h^1}{\partial u}(q)e_1' + \frac{\partial h^2}{\partial u}(q)e_2' + \frac{\partial h^3}{\partial u}(q)e_3'\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{h(q)} + 2u(q)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{h(q)}. \end{aligned}$$

Die Faustregel bis hierher lautet also:
Die Spalten der Ableitung geben die Koordinaten der Bilder der Standardvektorfelder im Definitionsbereich, wenn man sie als Linearkombination der Standardvektorfelder auf dem Bildbereich ausdrückt.
Nun bleibt, noch, die Koeffizienten als Funktionen der "freien Variablen" im Bildbereich zu schreiben. Da die Umkehrfunktion $h^{-1}: N \to M$ hier besonders einfach ist, nämlich[1]

$$h^{-1}(x,y,z) = (x,y), \quad \text{d.h. } u(x,y) = x, \quad v(x,y) = y,$$

ergibt sich als Ausdruck für die Vektorfelder $h_*(\frac{\partial}{\partial u})$ und $h_*(\frac{\partial}{\partial v})$ auf N bezüglich der Standardkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ letztlich

$$h_*(\frac{\partial}{\partial u}) = \frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{und} \quad h_*(\frac{\partial}{\partial v}) = \frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Beispiel 2.
Wir wollen nun noch die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi(u,v,w) = \begin{pmatrix} u + e^v \\ e^v + e^w \\ e^w \end{pmatrix}$$

betrachten. Das Bild von Ψ ist die offene Teilmenge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < y\} \subset \mathbb{R}^3,$$

[1] Aufmerksame LeserInnen werden feststellen, dass hier eine implizite Wahl getroffen wurde - die Funktionen x, y und z erfüllen ja auf N eine Gleichung. Der Einfachheit halber haben wir x und y als "freie Variablen" und z als "abhängige Variable" aufgefasst.

und man überlegt sich leicht, dass Ψ injektiv ist. Als Matrix der Ableitung erhalten wir

$$D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & e^v & 0 \\ 0 & e^v & e^w \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \\
\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) &= e^v\frac{\partial}{\partial x} + e^v\frac{\partial}{\partial y} = (y-z)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right) &= e^w\frac{\partial}{\partial y} + e^w\frac{\partial}{\partial z} = z\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Um die Standardvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ in den Koordinaten (u, v, w) auszudrücken, müssen wir die Ableitung $D\Psi$ invertieren. Dabei erhalten wir

$$(D\Psi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & e^{-v} & -e^{-v} \\ 0 & 0 & e^{-w} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Psi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial u} \\
\Psi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial}{\partial u} + e^{-v}\frac{\partial}{\partial v} \\
\Psi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial u} - e^{-v}\frac{\partial}{\partial v} + e^{-w}\frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned}$$