Fachbereich Mathematik
Prof. J. Latschev

WS 2012/13
7. Februar 2013

Höhere Analysis

Modulabschlussprüfung

- **Sie benötigen nur Schreibgeräte.** Die Verwendung jeglicher anderer Hilfsmittel (wie z. B. Taschenrechner, Handys, Smartphones, Notebooks, Tablets, Vorlesungsmitschriften, Notizen, Bücher u. s. w.) **ist nicht gestattet**.
  Bitte **schalten Sie Mobiltelefone ab**, verstauen Sie sämtliche persönlichen Gegenstände und Hilfsmittel (außer Verpflegung) in Ihren Taschen und legen Sie diese verschlossen auf den Sitzplatz neben Ihnen oder unter den Tisch.
- **Bitte lesen Sie alle Aufgaben sorgfältig durch.** Die Aufgaben sind auf dem jeweiligen Blatt zu bearbeiten. Sollte der Platz nicht ausreichen, so nutzen Sie bitte die Rückseite, danach die leeren Seiten am Ende.
- Im **ersten Teil** der Prüfung müssen **keine Begründungen** gegeben werden. Im **zweiten Teil** dürfen, wenn nicht direkt danach gefragt ist, alle aus der Vorlesung oder den Übungsaufgaben bekannten Aussagen benutzt werden. **Diese müssen dann aber explizit formuliert (und ihre Anwendbarkeit begründet) werden.**
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind maximal 43 Punkte möglich.
  Für die Note 1,0 müssen mindestens 36 Punkte erreicht werden.
  Für die Note 4,0 müssen mindestens 18 Punkte erreicht werden.
- Bei Unklarheiten, Fragen und Problemen wenden Sie sich bitte an die Aufsicht.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								

1. *(3 Punkte)* Wählen Sie **einen** der beiden folgenden Sätze aus und geben Sie seine Aussage vollständig wieder:

   (i) Satz von Stokes (für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$)

   Antwort:
   Sei $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine kompakte orientierte Untermannigfaltigkeit. Für* $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ *gilt dann*
   $$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

   (ii) Satz von Lebesgue über die monotone Konvergenz

   Antwort:
   Sei $(X, \mathcal{A}, \mathbf{m})$ *ein Maßraum,* $f_n : X \to [0, \infty]$ *eine Folge von messbaren Funktionen mit*
   $$(0 \leq) f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots .$$
   Dann gilt
   $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mathbf{m} = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mathbf{m}.$$

2. *(6 Punkte)* Entscheiden Sie für jede der angegebenen Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben Punktabzug, die Mindestpunktzahl für diese Aufgabe ist aber 0.

	wahr	falsch
Jede geschlossene 5-Form auf $\mathbb{R}^7$ ist exakt.	X[1]	
Die Form $\alpha := -y\,dx + x\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$ ist exakt.		X[2]
Ist α eine exakte und β eine geschlossene Differentialform auf $\mathbb{R}^n$, so ist $\alpha \wedge \beta$ exakt.	X[3]	
Das Vektorfeld $V(x, y, z) := 3\frac{\partial}{\partial x} - 5e^x\frac{\partial}{\partial z}$ auf $\mathbb{R}^3$ ist divergenzfrei, d.h. es gilt $\operatorname{div}(V) = 0$.	X[4]	
Jede Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.		X[5]
Die Vereinigung $M \cup N$ zweier Untermannigfaltigkeiten $M, N \subset \mathbb{R}^n$ gleicher Dimension ist wieder eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.		X[6]

[1] Lemma von Poincaré
[2] $d\alpha = 2\,dx \wedge dy \neq 0$
[3] Gilt $\alpha = d\eta$, so folgt wegen $d\beta = 0$ auch $\alpha \wedge \beta = d(\eta \wedge \beta)$.
[4] Einfache Rechnung direkt aus der Definition.
[5] Gegenbeispiel: ein offener Ball mit endlichem Radius.
[6] Gegenbeispiel: $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

3. *(6 Punkte)* Entscheiden Sie für jede der angegebenen Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Falsche Antworten geben Punktabzug, die Mindestpunktzahl für diese Aufgabe ist aber 0.

	wahr	falsch
Jede Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt.		X[1]
Jede Teilmenge in $[0,1]$ mit Lebesgue-Maß 1 ist dicht in $[0,1]$.	X[2]	
Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (Lebesgue-)fast überall stetig.	X[3]	
Jede einfache Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $L^1(\mathbb{R})$.		X[4]
Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \geq 1$.	X[5]	
In jedem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mathbf{m})$ gibt es nicht messbare Teilmengen.		X[6]

[1] Gegenbeispiel: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

[2] Jedes in $[0,1]$ offene Intervall hat positives Lebesgue-Maß, kann also nicht vollständig im Komplement liegen.

[3] Eine monotone Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

[4] Die charakteristische Funktion von $\mathbb{R}$ ist einfach, aber nicht integrierbar.

[5] Ist $f \in C_c(\mathbb{R})$, so ist auch $|f|^p \in C_c(\mathbb{R})$ für jedes $p \geq 1$, und stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind Lebesgue-integrierbar.

[6] Gegenbeispiel: Jedes auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ definierte Maß, zum Beispiel das Zählmaß.

Im folgenden Teil der Prüfung finden Sie insgesamt 4 Aufgaben, wobei es für jede Aufgabe 7 Punkte gibt.
Es werden alle bearbeiteten Aufgaben gewertet, so dass maximal 28 Punkte möglich sind.

4. Für glatte Funktionen $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ betrachten wir jeweils die Differentialform

$$\alpha_c := z\,dx - 3e^y z\,dy + c(x,y,z)\,dz.$$

a) Finden Sie eine geeignete Funktion $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass α_c geschlossen ist!

b) Finden Sie zu Ihrer Wahl von c aus **a)** eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $df = \alpha_c$!

c) Berechnen Sie zu Ihrer Wahl von c aus **a)** das Integral

$$\int_C \alpha_c,$$

wobei die Kurve C durch $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(2t), t)$ parametrisiert ist.

a) Man berechnet

$$d\alpha_c = dz \wedge dx - 3e^y dz \wedge dy + \frac{\partial c}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y} dy \wedge dz.$$

Aus $d\alpha_c = 0$ folgt damit $\frac{\partial c}{\partial x} = 1$ sowie $\frac{\partial c}{\partial y} = -3e^y$. Dies ist z. B. für $c(x,y,z) := x - 3e^y$ und somit

$$\alpha_c = zdx + xdz - 3e^y(zdy + dz)$$

erfüllt.

b) Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -3e^y z \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x - 3e^y.$$

Durch Integration erhält man hieraus die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xz + c_1(y,z) \\ f(x,y,z) &= -3e^y z + c_2(x,z) \\ f(x,y,z) &= xz - 3e^y z + c_3(x,y) \end{aligned}$$

für Funktionen $c_1, c_2, c_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Man liest ab, dass diese Gleichungen für $c_3(x,y) = 0$, $c_2(x,z) = xz$ und $c_1(y,z) = -3e^y z$ erfüllt sind.

c) Da nach dem vorherigen Aufgabenteil α_c exakt ist, folgt aus dem Satz von Stokes

$$\int_C \alpha_c = \int_C df = \int_{\partial C} f = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-1,0,\pi) - f(1,0,0) = -4\pi.$$

5. Wir betrachten

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = e^z\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist!

b) Bestimmen Sie ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld entlang M!

Im folgenden dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass $h : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$h(r,\phi) := \begin{pmatrix} e^r \cos\phi \\ e^r \sin\phi \\ 2r \end{pmatrix},$$

eine Parametrisierung einer offenen Teilmenge von M ist, so dass das Komplement $M \setminus \mathrm{Im}(h)$ des Bildes von h eine Nullmenge in M ist.

c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei

$$M_{a,b} := \{(x,y,z) \in M \mid a < z < b\}.$$

Drücken Sie den Flächeninhalt von $M_{a,b}$ als Integral

$$\int_{\dots}^{\dots} \dots \, dr$$

aus, wobei anstelle aller $\dots$ jeweils konkrete Ausdrücke in a, b, bzw. r stehen.

d) Ist der Flächeninhalt von

$$M_{<0} := \cup_{a<0} M_{a,0}$$

endlich? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Definiere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - e^z$. Dann ist $M = f^{-1}(0)$ und man berechnet

$$Df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -e^z \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f_{(x,y,z)}.$$

Da $-e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$, hat $Df_{(x,y,z)}$ Rang 1 für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Nach einer der äquivalenten Definitionen einer Untermannigfaltigkeit aus der Vorlesung folgt die Behauptung.

b) Nach einem Resultat aus der Vorlesung steht das Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ senkrecht auf M.

$$N := \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + e^{2z}}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -e^z \end{pmatrix}$$

ist also ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld entlang M.

c) Da $N := M \setminus \mathrm{Im}(h)$ nach dem Hinweis eine Nullmenge ist, parametrisiert zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Einschränkung $h|_{(\frac{a}{2},\frac{b}{2})\times(0,2\pi)}$ das Komplement der Nullmenge $N \cap M_{a,b}$ in $M_{a,b}$. Damit ist nach Vorlesung der Flächeninhalt von $M_{a,b}$ gegeben durch

$$\int_{M_{a,b}} \mu_M = \int_{(\frac{a}{2},\frac{b}{2})\times(0,2\pi)} h^*\mu_M.$$

Nach Satz 11 aus der Vorlesung ist $h^*\mu_M = \sqrt{g} dr \wedge d\phi$, wobei $g = \det(g_{ij})$ und $(g_{ij}(r,\phi))_{i,j} = (Dh(r,\phi))^T Dh(r,\phi)$. Man berechnet also

$$Dh(r,\phi) = \begin{pmatrix} e^r \cos\phi & -e^r \sin\phi \\ e^r \sin\phi & e^r \cos\phi \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}(Dh(r,\phi))^T Dh(r,\phi) &= \begin{pmatrix} e^r \cos\phi & e^r \sin\phi & 2 \\ -e^r \sin\phi & e^r \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r \cos\phi & -e^r \sin\phi \\ e^r \sin\phi & e^r \cos\phi \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2r}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + 4 & -e^{2r}\cos\phi\sin\phi + e^{2r}\cos\phi\sin\phi \\ -e^{2r}\cos\phi\sin\phi + e^{2r}\cos\phi\sin\phi & e^{2r}(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2r} + 4 & 0 \\ 0 & e^{2r} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Es folgt damit $h^*\mu_M = \sqrt{e^{2r}(e^{2r}+4)} dr \wedge d\phi = e^r\sqrt{e^{2r}+4} dr \wedge d\phi$, also

$$\int_{M_{a,b}} \mu_M = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{2\pi} e^r \sqrt{e^{2r}+4}\, dr \wedge d\phi = 2\pi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} e^r\sqrt{e^{2r}+4}\, dr.$$

d) Für $r < 0$ ist $e^{2r} < 1$, also nach der vorherigen Teilaufgabe

$$\int_{M_{a,0}} \mu_M = 2\pi \int_{\frac{a}{2}}^{0} e^r\sqrt{e^{2r}+4}\, dr \le 2\pi\sqrt{5} \int_{\frac{a}{2}}^{0} e^r\, dr = 2\pi\sqrt{5}(1 - e^{\frac{a}{2}}).$$

Da $\lim_{a\to-\infty} e^{\frac{a}{2}} = 0$, hat $M_{<0}$ nach Satz 4 aus Kapitel 3 der Vorlesung damit endliches Volumen.

6. Wir betrachten den Vektorraum der reellen Nullfolgen

$$\mathcal{N} := \left\{ \mathbf{x} = \{x_n\}_{n\geq 1} \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

a) Beweisen Sie, dass durch

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

eine Norm auf $\mathcal{N}$ definiert wird, und dass $(\mathcal{N}, \|\,.\,\|_\infty)$ ein Banach-Raum ist!

b) Geben Sie eine Folge $\{\mathbf{y}_k\}_{k\geq 1}$ von paarweise verschiedenen Elementen $\mathbf{y}_k \in \mathcal{N}$ an, die bezüglich der Norm $\|\,.\,\|_\infty$ gegen $\mathbf{0} \in \mathcal{N}$ konvergiert!

a) Durch $\|\cdot\|_\infty$ wird eine Norm definiert:
$\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0 \;\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{N}$ sowie $\|0\|_\infty = 0$ sind klar und ist $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0$, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0$, also $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbf{x} = 0$.
Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}$, so ist $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n| + |y_n|) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$.
Ist $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\|\lambda\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda||x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_\infty$.
$(\mathcal{N}, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig:
Sei $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{N}$. Dann ist für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ die reelle Folge $(x^k_{n_0})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $k, \ell \geq N$ gilt: $\varepsilon > \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^\ell\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^k_n - x^\ell_n| \geq |x^k_{n_0} - x^\ell_{n_0}|$.
Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit $x^k_n \to x_n$ für $k \to \infty$. Definiere $\mathbf{x} := \{x_n\}_{n\geq 1}$. Es ist zu zeigen dass $\mathbf{x}$ eine Nullfolge ist und $\mathbf{x}^k \to \mathbf{x}$ für $k \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^\ell\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, \ell \geq N$. Da ausserdem $\mathbf{x}^N$ eine Nullfolge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|x^N_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für jedes $k \geq N$ und $n \geq n_0$ ist dann $|x^k_n| = |x^k_n - x^N_n + x^N_n| \leq |x^k_n - x^N_n| + |x^N_n| < \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^k_n - x^N_n| + \frac{\varepsilon}{2} = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^N\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Damit ist für $n \geq n_0$ auch $|x_n| = \lim_{k\to\infty} |x^k_n| \leq \varepsilon$. $\mathbf{x}$ ist also eine Nullfolge.
Es ist noch zu zeigen dass $(\mathbf{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{N}$ gegen $\mathbf{x}$ konvergiert. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^\ell\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, \ell \geq N$. Für $k \geq N$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $|x^k_n - x_n| = |x^k_n - \lim_{\ell\to\infty} x^\ell_n| = \lim_{\ell\to\infty} |x^k_n - x^\ell_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und damit auch $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^k_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

b) Sei $\mathbf{y}^k = \{y^k_n\}_{n\geq 1}$ definiert durch $y^k_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $\|\mathbf{y}^k\|_\infty = \frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$.

7. Sei $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar mit $\ell(E) < \infty$, und sei $f_n : E \to \mathbb{R}$ eine Folge von messbaren Funktionen, welche punktweise gegen $f : E \to \mathbb{R}$ konvergieren. Beweisen Sie sorgfältig:

   a) Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
   $$g_n(x) := \begin{cases} \sin(f_n(x)) & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$
   sowie $g : E \to \mathbb{R}$,
   $$g(x) = \begin{cases} \sin(f(x)) & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$
   sind in $L^1(\mathbb{R})$.

   b) Für die Lebesgue-Integrale gilt
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx.$$

a) Definiere Funktionen $\tilde{f}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}_n|_E = f_n$ und $\tilde{f}_n(\mathbb{R} \setminus E) = \{0\}$. Die $\tilde{f}_n$ sind messbar: Nach einem Kriterium aus der Vorlesung ist z. z. dass $\tilde{f}_n^{-1}((a, \infty))$ messbar ist in $\mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Ist $a \geq 0$, so ist $\tilde{f}_n^{-1}((a, \infty)) = f_n^{-1}((a, \infty))$ messbar in E, da die f_n messbar sind nach Voraussetzung. Da E messbar in $\mathbb{R}$ ist, sind die $\tilde{f}_n^{-1}((a, \infty))$ auch messbar in $\mathbb{R}$. Ist $a < 0$, so ist $\tilde{f}_n^{-1}((a, \infty)) = f_n^{-1}((a, \infty)) \cup (\mathbb{R} \setminus E)$ messbar als Vereinigung messbarer Mengen, denn nach Voraussetzung ist auch E messbar. Ausserdem konvergieren die $\tilde{f}_n$ punktweise gegen die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $\tilde{f}|_E = f$ und $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\setminus E} = 0$. Es folgt hiermit $g_n = \sin \circ \tilde{f}_n$ und $g = \sin \circ \tilde{f}$. Die Funktionen g_n sind somit messbar als Verknüpfungen messbarer Funktionen. Da $|\sin(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$, folgt $|g_n| \leq \chi_E$ und da aus der Voraussetzung $\ell(E) < \infty$ folgt, dass $\chi_E \in L^1(\mathbb{R})$, sind auch die $g_n \in L^1(\mathbb{R})$. Ebenso ist $|g| \leq \chi_E$. Aus dem Satz von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz folgt dann dass auch $g \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Dies ist ebenfalls eine Aussage des Satzes von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz.