Universität Hamburg
Janko Latschev

Sommer 2024

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 2

Präsenzaufgaben

(P4) Sei $\mathcal{A}_1$ die übliche glatte Struktur auf $\mathbb{R}$, d.h. die Äquivalenzklasse des Atlasses $\{(\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$, und sei $\mathcal{A}_2$ die glatte Struktur, welche durch den Atlas $\{(\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = x^3, \mathbb{R})\}$ induziert wird.

a) Zeigen Sie, dass diese beiden glatten Strukturen auf $\mathbb{R}$ verschieden sind!

b) Sind diese beiden glatten Strukturen auf $\mathbb{R}$ diffeomorph?

c) Ändert sich die Antwort, wenn man $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch einen beliebigen Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf sich selbst ersetzt?

(P5) Sei $H_1^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die in Aufgabe (A2) auf Blatt 1 betrachtete Fläche

$$H_1^2 = \big\{(x_1, x_2, x_3) \,:\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie zwei Karten, die zusammen einen glatten Atlas für H_1^2 bilden, und bestimmen Sie die Kartenübergangsabbildungen und ihre Ableitungen.

(P6) Aus der Analysis ist bekannt, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben als $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ glatt ist. Benutzen Sie diese Tatsache, um zu gegebenem $r > 0$ eine glatte Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren:

- $h(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$.
- Der *Träger* $\operatorname{supp} h := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \neq 0\}}$ ist im Ball $B(0, r)$ enthalten.
- $B(0, \frac{r}{2}) \subseteq h^{-1}(1)$.

Bitte wenden!

Übungsaufgaben mit Abgabetermin Do, 18.4., in der Vorlesung

(A4) Wir betrachten die Abbildung $V : S^2 \to \mathbb{R}^6$, welche durch

$$V(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Zwei Punkte $p, q \in S^2$ haben genau dann dasselbe Bild unter V, wenn $p = \pm q$.

b) Das Bild $M := V(S^2)$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$.

c) Es gibt eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, so dass $L|_M : M \to \mathbb{R}^4$ injektiv ist.

Bemerkung: $\mathbb{R}P^2$ *ist nicht als Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *realisierbar.*

(A5) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Umgebung von K.

a) Konstruieren Sie eine glatte Funktion $\chi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\operatorname{supp} \chi$ ist eine kompakte Teilmenge von U.
- $\chi(p) > 0$ für alle $p \in K$.

b) Können Sie diese Funktion so modifizieren, dass $\chi(p) = 1$ für alle $p \in K$?

(A6) Eine topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls er sich nicht in zwei offene, nichtleere und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, d.h. sind U und V offene, nichtleere Teilmengen von X und gilt $X = U \cup V$, so folgt $U \cap V \neq \varnothing$. Er heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist!

b) Zeigen Sie, dass eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend ist!

c) Zeigen Sie, dass es in einer zusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeit sogar zu je zwei Punkten $x, y \in M$ ein $\epsilon > 0$ und eine *injektive* glatte Abbildung $c : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt!