

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 9

1. In Aufgabe 2 von Blatt 7 haben Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs einer Riemannschen Metrik h auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt. Wir identifizieren im folgenden $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und schreiben $z = x + iy$, so dass die Metrik h auf $T_z\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ die Form

$$h_z(v, w) = \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} \operatorname{Re}(v\bar{w})$$

annimmt.

- a) Zeigen Sie, dass die Kurve $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$, definiert als $\gamma(t) = ie^t$, eine Geodätische für die Metrik h ist.
- b) In der Funktionentheorie zeigt man, dass durch

$$\varphi_A(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Gruppenwirkung von $SL(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ definiert wird, d.h. für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$ bildet φ_A den Raum $\mathbb{H}$ bijektiv auf sich selbst ab, und es gilt $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$. Zeigen Sie, dass diese Wirkung isometrisch ist, d.h. dass $\varphi_A^*h = h$ für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

- c) Zeigen Sie, dass die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ transitiv auf den Einheitsvektoren im Tangentialraum $T_i\mathbb{H}$ und auch transitiv auf $\mathbb{H}$ wirkt! Folgern Sie daraus, dass sie auch transitiv auf dem Einheitstangentialbündel $T^1\mathbb{H} := \{v \in T\mathbb{H} \mid h(v, v) = 1\}$ wirkt, und dass die Exponentialabbildung in jedem Punkt $z \in \mathbb{H}$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_z\mathbb{H}$ definiert ist!
- d) Wie sehen die Bilder der Geodätischen der Metrik h aus?
2. Eine *Volumenform* auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine Differentialform $\mu \in \Omega^n(M)$ welche nirgends verschwindet. Zeigen Sie:
- a) Eine Mannigfaltigkeit besitzt genau dann eine Volumenform, wenn sie orientierbar ist, d.h. wenn es einen Atlas gibt, dessen Kartenübergänge positive Determinante haben.
- b) Ist M orientierbar, und ist g eine Riemannsche Metrik auf M , so wird durch die Bedingung

$$\mu_p(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad \text{für alle positiv orientierten Orthonormalbasen } e_1, \dots, e_n \text{ von } T_pM$$

eine eindeutige zu g assoziierte Volumenform μ definiert.

- c) Hat die Metrik g in lokalen positiv orientierten Koordinaten $(x_1, \dots, x_n)$ auf $U \subset M$ die Koeffizientenfunktionen g_{ij} , so hat die Volumenform lokal die Form

$$\mu|_U = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- d) Wir orientieren nun $M = S^2$ als Rand von B^3 und betrachten die von der Standardmetrik des $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik g auf S^2 . Zeigen Sie, dass die dazu assoziierte Volumenform μ durch

$$\mu_x(v, w) = \langle x, (v \times w) \rangle$$

gegeben ist, wobei $\times$ das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, und wir die Tangentialräume $T_x S^2$ mit den linearen Unterräumen $(\mathbb{R}x)^\perp$ des $\mathbb{R}^3$ identifizieren.

- e) Bezüglich dieser Volumenform hat S^2 die Fläche 4π .

3. Seien nun $A, B, C \in S^2$ drei Punkte, welche nicht alle auf demselben Großkreis liegen, und seien $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 2\pi)$ die Innenwinkel eines zugehörigen Dreiecks Δ , welches aus minimalen Geodätischen besteht (falls unter den Punkten keine Antipoden sind, ist dieses eindeutig bestimmt). Beweisen Sie, dass die Fläche $F(\Delta)$ dieses Dreiecks sich als

$$F(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

berechnen lässt!

Der folgende Beweis war bereits Euler bekannt: Vervollständigen Sie die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen. Die zu einem Seitenpaar gehörenden Großkreise zerlegen die Sphäre in jeweils 4 Gebiete, von denen je genau eines das Dreieck Δ und eines das gegenüberliegende Dreieck $-\Delta$ enthält. Was ist der Flächeninhalt der so ausgezeichneten beiden Gebiete? Die Vereinigung der 6 auf diese Weise den drei Seitenpaaren zugeordneten Gebiete überdeckt die gesamte Sphäre, wobei genau Δ und $-\Delta$ mehrfach überdeckt werden.