Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Sommer 2015

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 8

1. In der Vorlesung haben wir die *Koszul-Formel* für den Levi-Civita-Zusammenhang einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gesehen:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]).$$

a) Leiten Sie daraus die folgende Berechnungsformel für die Christoffel-Symbole des Zusammenhangs in lokalen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ auf $U \subset M$ her:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} \right).$$

b) Berechnen Sie die lokalen Koeffizienten der Standardmetrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und die Christoffel-Symbole ihres Levi-Civita-Zusammenhangs in den Koordinaten (φ, ϑ), welche durch die Karte $\psi : S^2 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\} \to (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit

$$\psi^{-1}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben sind.
Hinweis: Wenn Sie Symmetrien nutzen, können Sie den Rechenaufwand verkleinern.

2. Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein eindeutiges Vektorfeld $\operatorname{grad} f \in \Gamma(TM)$, so dass

$$g_p(\operatorname{grad}_p f, v) = df_p(v)$$

für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ gilt. Dieses Vektorfeld nennt man *Gradient* von f. Es wird manchmal auch mit ∇f bezeichnet.

b) Gilt $|\operatorname{grad} f| \equiv 1$, so sind die Integralkurven von $\operatorname{grad} f$ Geodätische des Levi-Civita-Zusammenhangs.

Finden Sie Beispiele für (pseudo)-Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) und Funktionen f, die zumindest auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$ glatt sind und die Bedingung $|\operatorname{grad} f| \equiv 1$ erfüllen.

Bitte wenden!

3. Sei $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ eine Isometrie zwischen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten, d.h. ein Diffeomorphismus mit $\varphi^* h = g$. Zeigen Sie:

a) Für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^g und ∇^h auf M bzw. N und Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt

$$\varphi_*(\nabla^g_X Y) = \nabla^h_{\varphi_* X}(\varphi_* Y).$$

b) $\gamma : (a, b) \to M$ ist genau dann eine Geodätische in (M, g), falls $\varphi \circ \gamma$ eine Geodätische in (N, h) ist.

c) Sei $(N, h) = (M, g)$ und sei $F \subset M$ die Fixpunktmenge der Isometrie $\varphi : (M, g) \to (M, g)$. Ist die Geodätische $\gamma : (a, b) \to M$ in einem Punkt $p = \gamma(t_0) \in F$ tangential an F, d.h. gilt $\dot{\gamma}(t_0) \in T_p F \subset T_p M$, so liegt das Bild von γ vollständig in F.