Universität Hamburg Sommer 2015
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 7

1. Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf TM. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) ∇ ist ein metrischer Zusammenhang.

b) g ist parallel bezüglich ∇, d.h. $\nabla g = 0$.

c) Paralleltransporte entlang Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ bezüglich ∇ sind Isometrien für g, d.h. es gilt stets

$$g_{\gamma(b)}(P_\gamma(v), P_\gamma(w)) = g_{\gamma(a)}(v, w).$$

2. Sei $\mathbb{H} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ die obere Halbebene, welche wir mit der Riemannschen Metrik h versehen, die in den Standardkordinaten durch folgende Matrix gegeben sei:

$$(h_{ij}(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs dieser Metrik!

b) Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ die Kurve $c(t) = (t, 1)$. Bestimmen Sie das entlang c parallele Vektorfeld $Y \in \Gamma_c(T\mathbb{H})$, das in $t = 0$ den Wert $Y_0 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \cong T_{(0,1)}\mathbb{H}$ hat!

3. Sei $\iota : M \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, und sei $g = \iota^* g_{\mathrm{st}}$ die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Riemannsche Metrik auf M und ∇ deren Levi-Civita-Zusammenhang. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$(\nabla_X Y)_p = \left(\nabla^{\mathbb{R}^n}_{X_p}(\iota_* Y)\right)^\top,$$

wobei wir für $X \in \Gamma_\iota(T\mathbb{R}^n)$ mit $X^\top$ die tangentiale Komponente von X entlang ι bezeichnen. Diese ist definiert als $X_p^\top = \pi(X)$, wobei $\pi : T_{\iota(p)}\mathbb{R}^n \to \iota_* T_p M$ die orthogonale Projektion ist.

b) Ist $\gamma : (a, b) \to M$ eine glatte Kurve und Y ein Vektorfeld entlang γ, so gilt

$$(\nabla_{\frac{d}{dt}} Y)_{t_0} = (Y'(t_0))^\top,$$

falls wir Y mit Hilfe der kanonischen Identifizierung der Tangentialräume als Abbildung $Y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ auffassen.

c) Folgern Sie daraus, dass eine Kurve $\gamma : (a, b) \to M$ genau dann eine Geodätische bezüglich ∇ ist, wenn $\ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in (a, b)$.

d) Wir betrachten nun den Spezialfall $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Geodätische durch den Punkt $p \in S^n$ mit dem Startvektor $\dot\gamma(0) = v \in T_p S^n$ durch die Formel

$$\gamma(t) = \cos(|v|t)p + \sin(|v|t)\frac{v}{|v|}$$

gegeben ist, wobei $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Norm von v bezeichnet.