Universität Hamburg
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Sommer 2015

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 4

1. Zeigen Sie, dass die unitäre Gruppe $U(n)$ eine Untermannigfaltigkeit des Raumes $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ der komplexen $n \times n$–Matrizen ist, und bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{I_n}U(n)$ an der Einheitsmatrix!

2. Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und (φ, U) eine Karte mit den lokalen Koordinaten $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Für $X, Y \in \Gamma(TM)$ und $f, g \in C^\infty(M)$ gilt allgemein

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c) Für glatte lokale Vektorfelder $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U gilt die Formel

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

3. Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Gilt für Vektorfelder $X_i \in \Gamma(TM)$ und $\overline{X_i} \in \Gamma(TN)$ $(i \in \{1, 2\})$ in jedem Punkt $p \in M$ die Beziehung

$$(\overline{X_i})_{F(p)} = F_* X_p,$$

so folgt auch

$$[\overline{X_1}, \overline{X_2}]_{F(p)} = F_*[X_1, X_2]_p \qquad \text{für alle } p \in M.$$

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, und seien E, F Vektorbündel über M. Überlegen Sie sich, dass aus diesen unter anderem folgende Vektorbündel über M konstruiert werden können:

a) $E \oplus F$ mit $\pi^{-1}(p) = E_p \oplus F_p$,

b) E^* mit $\pi^{-1}(p) = E_p^*$ (im Spezialfall $E = TM$ erhält man hier das Kotangentialbündel $E^* = T^*M$),

c) $E \otimes F$ mit $\pi^{-1}(p) = E_p \otimes F_p$, das Tensorprodukt der Fasern E_p und F_p,

d) $\Lambda^k E^*$ mit $\pi^{-1}(p) = \Lambda^k(E_p^*)$, der Raum der alternierenden k-Formen auf E_p,

e) $S^k E^*$ mit $\pi^{-1}(p) = S^k E_p^*$, der Raum der symmetrischen k-linearen Abbildungen $h : E_p \times \cdots \times E_p \to \mathbb{R}$.

Man nennt glatte lokale Schnitte $(b_1, \ldots, b_k)$ über einer offenen Menge $U \subset M$ einen *lokalen Rahmen für ein Vektorbündel* $B \to M$, falls für jedes $p \in U$ die Vektoren $b_1(p), \ldots, b_k(p)$ eine Basis der Faser B_p bilden. Seien $(s_1, \ldots, s_k)$ ein lokaler Rahmen von E und $(t_1, \ldots, t_\ell)$ ein lokaler Rahmen von F über derselben offenen Menge $U \subset M$. Geben Sie in den Fällen **a)** bis **e)** einen lokalen Rahmen des neuen Bündels über U an.