

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 3

1. Sei $A = A^T \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine nicht verschwindende symmetrische Matrix. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := x^T A x.$$

- Bestimmen Sie die Ableitung $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ von f in $x \in \mathbb{R}^k$!
- Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die kritischen Werte von f !
- Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch $F(x, y) = x - y$ eine Submersion ist!
- Zeigen Sie, dass für $r > 0$ die Teilmenge

$$M_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |x - y| = r\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

eine glatte 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist! Beschreiben Sie den Tangentialraum von M_r im Punkt $(x, y) \in M_r$!

2. Wir betrachten die Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$. Ist diese Abbildung

- eine Immersion? b) eine injektive Immersion? c) eine Einbettung?

Skizzieren Sie das Bild! Ändert sich die Antwort, wenn man stattdessen $c|_{(0, 2\pi)}$ bzw. $c|_{(0, \pi)}$ betrachtet?

3. Sei $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte (Potential-)Funktion. Wir definieren die Hamiltonsche Funktion $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (kinetische plus potentielle Energie) durch

$$H(x, y) := \frac{1}{2}|y|^2 + V(x).$$

- Zeigen Sie, dass $c \in \mathbb{R}$ genau dann ein regulärer Wert von H ist, wenn es ein regulärer Wert von V ist!
- Sei nun $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von H . Zeigen Sie, dass für $(x, y) \in M := H^{-1}(c)$ der Tangentialraum durch

$$T_{(x,y)}M = \{(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \langle y, w \rangle + \langle \nabla V(x), v \rangle = 0\}$$

gegeben ist, wobei $\nabla V := \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Gradient von V sein soll, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n bezeichnet!

4. Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $F : M \rightarrow N$ eine injektive Immersion von M in eine glatte Mannigfaltigkeit N . Zeigen Sie:

- F ist eine Einbettung.
- Falls $\dim M = \dim N$ und N zusammenhängend ist, so ist F sogar ein Diffeomorphismus.