

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 2

1. Sei M eine 0-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit im Sinne der Vorlesung. Zeigen Sie:

- a) M hat die diskrete Topologie, d.h. jede Teilmenge von M ist offen.
- b) Die Menge M ist abzählbar.

2. Für $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Teilmenge

$$H_c^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = c\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

- a) Skizzieren Sie H_1^2 , H_0^2 und H_{-1}^2 !
- b) Geben Sie einen glatten Atlas auf H_1^2 an! Zeigen sie auch, dass die Kartenwechsel glatte Abbildungen sind!
- c) Zeigen Sie, dass H_0^n für $n > 0$ keine glatte Mannigfaltigkeit ist!

3. Sei $\mathcal{A}_1$ die übliche differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}$, d.h. die Äquivalenzklasse des Atlases $\{(\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$, und sei $\mathcal{A}_2$ die differenzierbare Struktur, welche durch den Atlas $\{(\varphi(x) = x^3, \mathbb{R})\}$ induziert wird.

- a) Zeigen Sie, dass diese beiden differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$ verschieden sind!
- b) Sind diese beiden differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$ diffeomorph?

4. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls er sich nicht in zwei offene, nichtleere und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, d.h. sind U und V offene, nichtleere Teilmengen von X und gilt $X = U \cup V$, so folgt $U \cap V \neq \emptyset$. Er heißt *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ existiert.

- a) Zeigen Sie, dass das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung wieder zusammenhängend ist!
- b) Zeigen Sie, dass eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend ist!
- c) Zeigen Sie, dass es in einer zusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeit sogar zu je zwei Punkten $x, y \in M$ ein $\epsilon > 0$ und eine glatte Abbildung $c : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt!