Universität Hamburg Sommer 2015
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 12

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische, so dass $q = \gamma(b)$ nicht entlang γ konjugiert ist zu $p = \gamma(a)$. Zeigen Sie, dass es dann zu jedem $v \in T_pM$ und $w \in T_qM$ ein eindeutiges Jacobifeld J entlang γ mit $J(a) = v$ und $J(b) = w$ gibt!

2. Sei (M, g) eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\varphi : M \to M$ eine Isometrie von M mit $\varphi(p) = p$.

a) Zeigen Sie: Gilt $\varphi_{*,p} = \mathrm{id} : T_pM \to T_pM$, so folgt schon $\varphi = \mathrm{id}_M$!

b) Was sagt das über die Beziehung der Dimension von M zur möglichen Dimension der Isometriegruppe von M?

3. Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe. Wir nennen eine Wirkung von G auf X *eigentlich diskontinuierlich*, falls zu jedem Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ existiert, so dass $g \cdot U \cap U = \varnothing$ für alle $g \neq 1 \in G$. Zeigen Sie:

a) Wirkt eine Gruppe G eigentlich diskontinuierlich auf einer Mannigfaltigkeit M, so existiert eine eindeutige glatte Struktur auf M/G, so dass die natürliche Projektion $\pi : M \to M/G$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.
Bemerkung: Die Abbildung $\pi : M \to M/G$ ist in diesem Fall sogar eine Überlagerung. Allgemeiner gilt: Wirkt eine kompakte Liegruppe G frei auf einer Mannigfaltigkeit M, so existiert eine eindeutige glatte Struktur auf M/G, so dass $\pi : M \to M/G$ eine Submersion ist.

b) Ist die Wirkung isometrisch bezüglich einer Metrik g auf M, so erbt der Quotient M/G eine eindeutige Metrik $\bar{g}$ so dass $\pi^*\bar{g} = g$.

c) Die folgenden Gruppenwirkungen sind eigentlich diskontinuierlich und isometrisch.

(i) $\mathbb{Z}^n$ wirkt auf $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{st}})$ durch Translationen, d.h. $z \cdot x := x + z$.

(ii) $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\} \subset (\mathbb{R}, \cdot)$ wirkt auf $\mathbb{R} \times S^1$ (mit der Produktmetrik) durch $\epsilon \cdot (t, z) := (\epsilon t, \epsilon z)$.

(iii) $\mathbb{Z}_n \cong \{\eta^k \mid \eta = e^{\frac{2\pi i}{n}}, k = 0, \ldots, n-1\} \subset S^1$ wirkt auf $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ mit der induzierten runden Metrik durch

$$\eta^k \cdot (z_1, z_2) := (\eta^k z_1, \eta^k z_2).$$

Der letzte Quotientenraum ist ein Beispiel für einen sogenannten *Linsenraum*.

Bitte wenden!

4. Seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und sei $M = M_1 \times M_2$ das Produkt mit der Produktmetrik g. Wir bezeichnen mit $\pi_i : M \to M_i$ die Projektionen. Beweisen Sie:

a) Für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma(TM_1)$ gibt es einen kanonischen *Lift* nach M, d.h. ein Vektorfeld $\widetilde{X} \in \Gamma(TM)$ mit

$$(\pi_1)_{*,(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = X_p, \quad (\pi_2)_{*,(p,q)}(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$$

für alle $(p,q) \in M_1 \times M_2$. Analog kann man auch Vektorfelder $U \in \Gamma(TM_2)$ liften.

b) Für alle $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ und $U, V \in \Gamma(TM_2)$ gilt

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}, \quad [\widetilde{U}, \widetilde{V}] = \widetilde{[U,V]}, \quad \text{und } [\widetilde{X}, \widetilde{U}] = 0.$$

c) Sind $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ und $U, V \in \Gamma(TM_2)$ und $Z = \widetilde{X} + \widetilde{U}$ und $Z' = \widetilde{Y} + \widetilde{V}$ die induzierten Vektorfelder auf M, so gilt

$$\nabla^g_Z Z' = \nabla^{g_1}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} + \nabla^{g_2}_{\widetilde{U}} \widetilde{V}.$$

d) Sind $v \in T_pM_1$ und $w \in T_qM_2$ nichtverschwindende Vektoren und ist $\sigma \subset T_{(p,q)}M$ die von $\widetilde{v}$ und $\widetilde{w}$ aufgespannte Ebene, so verschwindet die Schnittkrümmung $K(\sigma)$.