

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 11

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $(x_1, \dots, x_n)$ Koordinaten auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, so dass die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in jedem Punkt von U eine Orthonormalbasis des Tangentialraumes bezüglich g bilden. Zeigen Sie, dass dann die Krümmung von g auf U verschwindet!
2. Sei I ein offenes Intervall und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (r(t), z(t))$ eine glatte Kurve mit $r(t) > 0$ und $\|\dot{c}(t)\| = 1$ auf ganz I . Wir betrachten c als eine Kurve in der xz -Ebene in $\mathbb{R}^3$ und definieren die durch c bestimmte *Rotationsfläche* als das Bild der Abbildung $F : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(\theta, t) := (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, z(t)).$$

- a) Zeigen Sie, dass F eine Immersion ist!
- b) Sei $g := F^*g_{\mathbb{R}^3}$ die induzierte Metrik auf $\mathbb{R} \times I$. Zeigen Sie, dass deren Komponenten bezüglich der Standardkoordinaten (θ, t) folgende Form haben:

$$g_{tt}(\theta, t) = 1, \quad g_{\theta\theta}(\theta, t) = r(t)^2, \quad g_{\theta t}(\theta, t) = g_{t\theta}(\theta, t) = 0.$$

- c) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole der Metrik g auf $\mathbb{R} \times I$ in den Koordinaten (θ, t) !
- d) Zeigen Sie, dass eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times I$ genau dann eine Geodätische bezüglich der Metrik g ist, falls die Differentialgleichungen

$$\ddot{\gamma}_1(s) = -2 \frac{r'(\gamma_2(s))}{r(\gamma_2(s))} \dot{\gamma}_1(s) \dot{\gamma}_2(s) \quad \text{und} \quad \ddot{\gamma}_2(s) = r(\gamma_2(s)) r'(\gamma_2(s)) \dot{\gamma}_1(s)^2$$

gelten!

- e) Folgern Sie daraus, dass für alle $\theta_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma(s) := (\theta_0, \alpha s + \beta)$ eine Geodätische in $\mathbb{R} \times I$ ist! Auf welchem Intervall ist diese Kurve definiert?
- f) Für welche Werte t_0 ist die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times I$, $\gamma(s) = (s, t_0)$ eine Geodätische?
- g) Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung der Metrik g auf $\mathbb{R} \times I$ sich als

$$K(\theta, t) = -\frac{r''(t)}{r(t)}$$

berechnen lässt!

3. Sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R . Die *Ricci*krümmung $Ric_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$Ric_p(u, v) := \operatorname{tr}_g(w \mapsto R(w, u)v) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(e_i, u)v, e_i),$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von $T_p M$ und $\epsilon_i = g(e_i, e_i) \in \{\pm 1\}$ ist. Die *Skalar*krümmung $s \in C^\infty(M)$ ist definiert als

$$s(p) := \operatorname{tr}_g Ric_p = \sum_{i=1}^n \epsilon_i Ric_p(e_i, e_i).$$

Zeigen Sie:

- a) Die Riccikrümmung ist eine symmetrische Bilinearform.
- b) Für $n \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k = \frac{2}{2-n}\lambda$ gilt genau dann $Ric = k \cdot g$, falls

$$Ric - \frac{1}{2}s \cdot g - \lambda \cdot g = 0.$$

Bemerkung: Metriken, welche die Gleichung $Ric = k \cdot g$ erfüllen, nennt man in der mathematischen Literatur Einsteinmetriken.