Universität Hamburg Sommer 2015
Janko Latschev, Fabian Kirchner

Differentialgeometrie

Übungsaufgaben 10

1. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit verschiedenen Modellen des hyperbolischen Raumes H^n in beliebigen Dimensionen. Wir schreiben $\mathbb{R}^{1,n}$ für den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der (konstanten) pseudo-Euklidischen Metrik

$$g(v,w) = -v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n+1} v_i w_i,$$

wobei wir später stets $n \geq 1$ voraussetzen. Wir definieren die Untermannigfaltigkeit

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(x,x) = -1, x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^{1,n}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von g auf H^n positiv definit ist!

b) Zeigen Sie, dass H^n konstante Schnittkrümmung hat, indem Sie den Beweis für S^n aus der Vorlesung anpassen!

c) Sei $s := (-1, 0, \ldots, 0)$ und sei $K := \{s + y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid g(y,y) = 0\}$ der um s verschobene Nullkegel der Metrik g. Zeigen Sie, dass die Inversion $I_1 : \mathbb{R}^{1,n} \setminus K \to \mathbb{R}^{1,n} \setminus K$,

$$I_1(x) := s - \frac{2(x-s)}{g(x-s, x-s)}.$$

eine Involution ist, d.h. dass $I_1 \circ I_1 = \mathrm{id}$ gilt!

d) Zeigen Sie, dass I_1 die Untermannigfaltigkeit H^n diffeomorph auf den offenen Ball $B^n(0,1) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ abbildet, und dass die zurückgezogene Metrik auf diesem Ball die Form

$$h_1 := I_1^* g = \frac{4}{(1 - \|x\|_{\mathrm{st}}^2)^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat, wobei g_{st} die Riemannsche Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet!

e) Sei nun $t = (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^n$ und $I_2 : \mathbb{R}^n \setminus \{t\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{t\}$ die Inversion

$$I_2(z) = t + \frac{2(z-t)}{g_{\mathrm{st}}(z-t, z-t)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Involution. Zeigen Sie, dass I_2 den offenen Ball $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{H}^n := \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_n > 0\}$ abbildet, und dass auf $\mathbb{H}^n$ die zurückgezogene Metrik $I_2^* h_1$ die Form

$$h_2 := I_2^* h_1 = \frac{1}{z_n^2} g_{\mathrm{st}}$$

hat! Für $n = 2$ erhalten wir die Metrik h auf $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 1 vom letzten Übungsblatt.

f) Beweisen Sie, dass H^n vollständig ist!

Bitte wenden!

2. Sei $(V, \langle\, .\, ,\, .\, \rangle)$ ein pseudo-Euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch

$$r(u,v)w := \langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v, \quad u, v, w \in V,$$

ein algebraischer Krümmungstensor definiert wird!

3. Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass die Schnittkrümmungen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) den Krümmungstensor R eindeutig bestimmen. Zeigen Sie dazu für $x, y, z, t \in T_pM$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\big(R(x+\alpha t, y+\beta z, y+\beta z, x+\alpha t) - R(x+\alpha z, y+\beta t, y+\beta t, x+\alpha z)\big)|_{\alpha,\beta=0} = 6R(x,y,z,t),$$

wobei wir $R(a,b,c,d) := g(R(a,b)c,d)$ gesetzt haben.
Hinweis: Verwenden Sie die Symmetrien des Krümmungstensors und die Bianchi-Identität, um die "störenden" Terme umzuschreiben!
Folgt die Aussage mit diesem Beweis auch für pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten?