

DIFFERENTIALGEOMETRIE

Übungsaufgaben 1

1. Beweisen Sie, dass die drei in der Vorlesung formulierten Charakterisierungen glatter Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ in der Tat äquivalent sind:

- a) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ (mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen), so dass

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

- b) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine offene Teilmenge $V^* \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine glatte injektive Abbildung $\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass für jedes $y \in V^*$ die Ableitung $d\varphi_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vollen Rang k hat und $\varphi(V^*) = U \cap M$ gilt.

- c) Zu jedem Punkt $x \in M$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Abbildung $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, so dass für alle $p \in U$ die Ableitung $d\psi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ vollen Rang $n-k$ hat und $U \cap M = \psi^{-1}(0)$ gilt.

Hinweis: Dies ist eine Übung in der Anwendung des Satzes über die Umkehrfunktion bzw. des Satzes über implizite Funktionen aus der Analysis. Falls Sie damit Schwierigkeiten haben, so konsultieren Sie ein Lehrbuch Ihrer Wahl zur Analysis.

2. a) Beweisen Sie, dass die beiden stereografischen Projektionen $\sigma^\pm : S^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ einen glatten Atlas für S^k bilden, indem Sie nachprüfen, dass die Übergangsabbildung $\sigma_- \circ \sigma_+^{-1}$ ein Diffeomorphismus zwischen ihrem Definitions- und ihrem Wertebereich ist.
- b) Beweisen Sie analog, dass auch die Karten $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B^k(0,1) \subset \mathbb{R}^k$ mit $U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^k \mid \pm x_i > 0\}$ und $\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{k+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{k+1})$ einen glatten Atlas für S^k bilden.
- c) Zeigen Sie, dass diese beiden Atlanten äquivalent sind, also dieselbe glatte Struktur auf S^k definieren.
3. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt bekanntlich *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge von Y offen in X ist. Eine Teilmenge $K \subset X$ in einem topologischen Raum heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Zeigen Sie:
- a) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Y$ abgeschlossen in X ist.
- b) Ist X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X) \subset Y$ kompakt.
- c) Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.
- d) Ist X kompakt und Y ein Hausdorff-Raum, und ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus, d.h. f^{-1} ist ebenfalls stetig.