

## FUNKTIONENTHEORIE

### Übungsblatt 6

1. (2+2+2+2 Punkte) Finden Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und bestimmen Sie jeweils den Typ (und bei Polstellen die Ordnung):

a)  $\frac{e^z - 1}{z^n}$ , für festes  $n \in \mathbb{N}$                       c)  $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$   
b)  $\frac{1}{z^3 - z^5}$     d)  $\frac{1}{\cos(z)^2}$

2. (3+3 Punkte)

- a) Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien auf  $\mathcal{O} \setminus \{z_0\}$  holomorph, mit jeweils einer Polstelle der Ordnung  $k$  bzw.  $\ell$  in  $z_0$ . Was können Sie über die Vielfachheit der Polstelle  $z_0$  der Funktionen  $f + g$  und  $f \cdot g$  sagen?
- b) Sei  $f : \mathcal{O} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit einer nicht hebbaren Singularität in  $z_0$ . Welchen Typ hat dann die Singularität  $z_0$  für  $\sin \circ f$ ?

3. (3 Punkte) Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von L'Hospital für holomorphe Funktionen!

4. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der hyperbolische Abstand zweier Punkte  $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$  sich wie folgt als Doppelverhältnis berechnen lässt: Sind  $a, b \in S^1$  die Schnittpunkte mit  $S^1$  des eindeutigen (verallgemeinerten) Kreises durch  $z_0$  und  $z_1$ , welcher senkrecht auf  $S^1$  steht, so gilt

$$d_h(z_0, z_1) = |\log(\text{DV}(a, z_0, b, z_1))|.$$