Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

1. *(1+1+1+1 Punkte)* Sei $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus, d.h. $\log(z) = \ln(|z|) + \mathbf{i}\arg(z)$ mit $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ (wir haben also die negative reelle Achse mit dazu genommen!). Für welche $z, w \in \mathbb{C}^*$ gelten folgende Aussagen?

a) $\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w)$,

b) $\log(z^k) = k \cdot \log(z)$, (jeweils für festes $k \in \mathbb{Z}$),

c) $\exp(\log(z)) = z$,

d) $\log(\exp(z)) = z$,

2. *(3 Punkte)* Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $B(z_0, r) \subset U$ ein Ball und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie die *Cauchy-Abschätzungen*: Ist $M > 0$ eine Konstante, so dass für alle $z \in B(z_0, r)$ die Abschätzung $|f(z)| \leq M$ gilt, so folgt

$$|f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!M}{(r - |z - z_0|)^m} \qquad \text{für alle } z \in B(z_0, r).$$

Bemerkung: Eine geeignete Konstante $M > 0$ existiert zum Beispiel immer dann, wenn $\overline{B(z_0, r)} \subset U$ (warum?).

3. *(1+2+2+1 Punkte)* Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist f eine ganze Funktion, so dass für $n \in \mathbb{N}$ stets $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ gilt, so folgt $f(z) = z$.

b) Ist $f : B(0, 2) \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

c) Es existiert keine holomorphe Funktion $f : B(0, 1) \to \mathbb{C}$, welche $f(z)^2 = z$ erfüllt.

Muss eine ganze Funktion f mit $f(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit der Funktion $z \mapsto z^2$ übereinstimmen?

4. *(2+2 Punkte)* Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Bernoulli Zahlen:

a) Für $n > 0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k} = 0$.

b) Für $k \geq 1$ gilt $B_{2k+1} = 0$, und $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ mit $\operatorname{sgn}(B_{2k}) = (-1)^{k-1}$.