Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

1. *(1 Punkt)* Seien f und g holomorph auf $\mathcal{O}$, und sei $\gamma : [0,1] \to \mathcal{O}$ ein Weg. Beweisen Sie die Formel für partielle Integration:

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,dz = f(\gamma(1))g(\gamma(1)) - f(\gamma(0))g(\gamma(0)) - \int_\gamma f'(z)g(z)\,dz.$$

2. *(3+2 Punkte)*

a) Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ offen und $G \subset \mathbb{C}$ eine Gerade. Beweisen Sie: Ist $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\mathcal{O} \setminus G$ holomorph, so ist f auf ganz $\mathcal{O}$ holomorph.

b) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bezüglich $\mathbb{R}$, d.h. $z \in \mathcal{O}$ genau dann, wenn $\overline{z} \in \mathcal{O}$. Wir setzen $\mathcal{O}_+ := \mathcal{O} \cap \mathbb{H} = \{z \in \mathcal{O} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\mathcal{O}_\mathbb{R} := \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
Ist $f : \mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und auf $\mathcal{O}_+$ holomorph und gilt $f(\mathcal{O}_\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ mit $f = \widetilde{f}|_{\mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_\mathbb{R}}$.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 3.a) von Blatt 2.

3. *(2+2+2+2 Punkte)* Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} \frac{\cos(z^3) + \sin(z)}{z^4 + 2z^3}\,dz,$

b) $\displaystyle\int_{\partial B(1,3)} \frac{e^{\alpha z}}{2z^2 - 5z + 2}\,dz$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ *(Hinweis: Partialbruchzerlegung)*,

c) $\displaystyle\int_{\partial B(1,1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ für $n \in \mathbb{N}$, und

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\mathbf{i}t + e^{\mathbf{i}t}}\,dt.$

4. *(2+2+0 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgern Sie aus dem Satz von Liouville:

a) Ist $\operatorname{Re} f > 0$, so ist f konstant.

b) Allgemeiner: Ist f nicht konstant, so liegt $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ enthält keinen offenen Ball.

c)* Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, und gilt $f(z + \lambda) = f(z) = f(z + \mu)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.