Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 3

1. *(2+1 Punkte)* Sei $\mathrm{GL}_+(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ die Teilmenge der Matrizen mit positiver Determinante. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Möbiustransformationen biholomorphe Automorphismen der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ induzieren! Welche von diesen fixieren den Punkt $\mathbf{i} \in \mathbb{H}$?

2. *(2+2 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere offene Menge. Zeigen Sie, dass $f(z) = \overline{z}$ auf $\mathcal{O}$ keine Stammfunktion besitzt, und zwar

a) mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen.

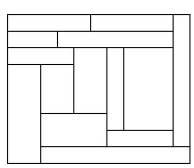
b) mit Hilfe von Satz 1 aus Kapitel 3 der Vorlesung.

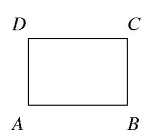
3. *(2+1 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie für $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2\pi \mathbf{i} t}$, das Integral $\displaystyle\int_\gamma z^{-1}\left(z + z^{-1}\right)^{2n} dz$.

b) Folgern Sie aus dem Resultat, dass $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(x)^{2n}\, dx = 2^{1-2n}\binom{2n}{n}\pi$.

4. *(2+1 Punkte)* Unser Ziel ist der Beweis der folgenden Behauptung:
Besteht ein Rechteck R wie links im Bild aus endlich vielen rechteckigen Teilen, und hat jeder der Teile mindestens eine Kante ganzzahliger Länge, so hat auch R eine Kante ganzzahliger Länge.





Dazu definieren wir für ein axenparalleles Rechteck $R(ABCD) \subset \mathbb{R}^2$ wie rechts im Bild den Ausdruck

$$I_{ABCD} := \int_{R(ABCD)} e^{2\pi \mathbf{i}(x+y)}\, dx\, dy$$

Bitte wenden!

a) Zeigen Sie, dass $I_{ABCD} = 0$ genau dann, wenn das Rechteck $R(ABCD)$ eine Seite mit ganzzahliger Länge hat! *Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini!*

b) Beweisen Sie, dass I für beliebige Zerlegungen von Rechtecken in Teilrechtecke additiv ist!

5. *(Zusatz, 0 Punkte)* Beweisen Sie

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx,$$

indem Sie die Funktion $f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$ über den Rand des Kreissektors $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$ integrieren und den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten. Sie dürfen hierbei $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ als bekannt voraussetzen.