Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 2

1. *(1+1+1+1 Punkte)*

a) In welchen Punkten ist $f(x+\mathbf{i}y) = x^5y^4 - \mathbf{i}x^4y^5$ komplex differenzierbar?

b) Diskutieren Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{C}$, in welchen Punkten die Funktion $f(x+\mathbf{i}y) = ax + by$ komplex differenzierbar ist!

c) Beschreiben Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $f(x+\mathbf{i}y) = u(x) + \mathbf{i}v(y)$ mit $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

d) Beschreiben Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f(x+\mathbf{i}y)) = x^3 - 3xy^2$.

2. *(1+1+2+0 Punkte)* Finden Sie jeweils biholomorphe Abbildungen zwischen

a) dem Sektor $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{4}\}$ und der offenen Kreisscheibe $\mathbb{D}$,

b) dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ und dem ersten Quadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$,

c) der halben Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{D} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$, sowie

d)* der doppelt geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ und der Kreisscheibe $\mathbb{D}$!

3. *(2+2 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorph.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f^* : \mathcal{O}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in \mathcal{O}\} \to \mathbb{C}$, $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ ebenfalls holomorph ist, und bestimmen Sie die Ableitung von f^* in $z \in \mathcal{O}^*$!

b) Beweisen Sie: Ist $\mathcal{O}$ zusammenhängend und ist $f(\mathcal{O})$ in einer 1-dimensionalen reellen Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ enthalten, dann ist f konstant!

4. *(2+1+2 Punkte)* Sei $\mathcal{M}$ die Menge derjenigen Möbiustransformationen, welche $\mathbb{D}$ biholomorph auf sich selbst abbilden. Diese bilden offenbar eine Untergruppe in der Gruppe aller Möbiustransformationen.

a) Zeigen Sie, dass jedes $\varphi \in \mathcal{M}$ durch $\varphi(0)$ und $\varphi(1)$ eindeutig bestimmt ist!

b) Beschreiben Sie alle $\varphi \in \mathcal{M}$, welche den Punkt 0 fixieren!

c) Finden Sie ein $\varphi \in \mathcal{M}$, welches einen vorgegebenen Punkt $z_0 \in \mathbb{D}$ auf 0 abbildet!