Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

# Funktionentheorie

## Übungsblatt 10

**1.** *(2 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, welche die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ enthält, und sei $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(z) = z^n$ in der Scheibe $\mathbb{D}$!

**2.** *(2+1 Punkte)* Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Zahl mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$. Zeigen Sie:

**a)** Die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ hat genau eine Lösung in der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

**b)** Ist $\lambda$ reell, so ist auch die Lösung reell.

**3.** *(3+2 Punkte)*

**a)** Formulieren und beweisen Sie eine Version des Satzes von Rouché für meromorphe Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$!

**b)** Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{z^3} - 15z^2 + 7$ in $\mathbb{D}$!

**4.** *(3+2 Punkte)*

**a)** Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und sei $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine Funktion $h : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (h(z))^n$, falls für alle geschlossenen Kurven $\gamma$ in $\mathcal{O}$ die Windungszahl $w(f \circ \gamma, 0)$ durch $n$ teilbar ist. Eine solche Funktion $h$ nennt man *$n$-te Wurzel von $f$*.
*Ansatz: Wählen Sie $z_0 \in \mathcal{O}$ und beschreiben Sie $h$ als*

$$h(z) = c \exp\left(\frac{1}{n}\int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw\right)$$

*für eine geeignete Konstante $c \in \mathbb{C}^*$, wobei die Integration entlang einem beliebigen Weg von $z_0$ nach $z$ stattfindet.*

**b)** Was ist die kleinste kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$, so dass $f(z) = z^2 - 1$ auf $\mathbb{C} \setminus A$ eine Quadratwurzel besitzt?

**Bitte wenden!**

**5.** *(Zusatz, 0 Punkte)* Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$, und sei $g : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ meromorph mit endlich vielen Polstellen in $\mathbb{H}$ und genau einer Polstelle in $a \in \mathbb{R}$, welche von erster Ordnung ist. Wir nehmen außerdem an, dass $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ (dies gilt zum Beispiel, falls $g(z)$ eine rationale Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ mit $\deg p < \deg q$ ist). Wir setzen $f(z) := g(z)e^{\mathbf{i}z}$.
Beweisen Sie:

**a)** $\lim\limits_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = -\pi\mathbf{i}\operatorname{Res}(f,a)$, wobei der Weg $\gamma_\rho : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{\mathbf{i}(\pi - t)}$ beschrieben ist.

**b)** Es gilt

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{-\infty}^{a-\rho} f(x)\,dx + \int_{a+\rho}^{\infty} f(x)\,dx = \pi\mathbf{i}\operatorname{Res}(f,a) + 2\pi\mathbf{i}\sum_{z\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}(f,z)$$

*Hinweis: Passen Sie den Beweis von Proposition 6 geeignet an.*

**c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$