Universität Hamburg
Janko Latschev
Andreas Gerstenberger

Sommer 2013

Funktionentheorie

Übungsblatt 1

1. *((1+1+1+1)+2 Punkte)* Skizzieren Sie folgende Teilmengen $M_j \subset \mathbb{C}$:

a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = \mathrm{Re}(z)\}$

b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 10\}$

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) \leq 2\}$

d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} + z - 3\overline{z} + 1 = 0\}$

Entscheiden Sie außerdem für jede dieser Mengen, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt ist!

2. *(3+2+3 Punkte)*

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathbf{i}y$:

(i) $\frac{1-2\mathbf{i}}{1+\frac{1}{3}\mathbf{i}}$ (ii) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi\mathbf{i}}{12}}$ (iii) $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = 4 - 4\mathbf{i}$!

c) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{\left(\frac{2+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$?

3. *(2+(2+2) Punkte)*

a) Rechnen Sie für Matrizen $A, B \in GL(2,\mathbb{C})$ nach, dass die zugehörigen Möbiustransformationen die Gleichung

$$\varphi_{A\circ B} = \varphi_A \circ \varphi_B$$

erfüllen, und dass $\varphi_A = \varphi_B$ genau dann, wenn $A = \alpha \cdot B$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$!

b) Beschreiben Sie die Fixpunktmengen der Abbildungen $z \mapsto \frac{1}{z}$ und $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$, und interpretieren Sie die Abbildungen geometrisch!

4. *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass drei komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bilden, falls

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$$

gilt!