Fachbereich Mathematik
J. Latschev

SoSe 2012

Vortragsthemen

Proseminar Chaos

Spielregeln:

- Dies ist ein mathematisches Proseminar. Gleichberechtigte Lernziele sind einerseits das Verständnis der mathematischen Inhalte und andererseits die zielpublikumsgerechte Präsentation des im Selbststudium angeeigneten Wissens.
- Die Vortragszeit beträgt jeweils 60 Minuten. Die übrigen 30 Minuten bleiben für Fragen, Diskussionen und Ergänzungen. Eine aktive Beteiligung an der Diskussion wird erwartet und ist Teil der Seminarleistung.
- Zu jedem Vortrag wird von dem oder der Vortragenden ein Begleittext ausgearbeitet, welcher die Inhalte verständlich zusammenfasst. Dieser sollte so kurz wie möglich und so lang wie nötig sein, und ist mir 2 Wochen vor dem Vortragstermin abzugeben.

1.) Grundbegriffe

Führen Sie die folgenden Begriffe ein: diskretes dynamisches System, Bahn, Fixpunkt, periodische Bahn, schließlich periodische Bahn, stabile Menge eines periodischen Punktes. Illustrieren Sie jeden dieser Begriffe an mindestens zwei der folgenden Beispielfunktionen

(a) $f_1(x) = \sin(x)$ auf $\mathbb{R}$,

(b) $f_2(x) = \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$,

(c) $f_3(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$, und

(d) $f_4(x) = x - x^2$ auf $[0, 1]$,

sowie an mindestens einem selbst gewählten Beispiel.

Erläutern Sie die Methode der "Iteration am Graphen" ("graphical analysis") an mehreren Beispielen, und führen Sie auch Phasenporträts ein.

Literatur:
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.3 (S.17–21)

2.) Beispiele zur Iteration komplexer Funktionen

Führen Sie die komplexen Zahlen ein, erläutern Sie die Polarkoordinaten, und führen Sie auch den Absolutbetrag ein. Zeigen Sie insbesondere, dass der Kreis $S^1 \subset \mathbb{C}$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.

Diskutieren Sie Fixpunkte und periodische Punkte der Abbildungen

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ z &\mapsto z^k. \end{aligned}$$

Zeigen Sie insbesondere, dass die periodischen Punkte von f_k für $k \neq 0$ dicht in $S^1 \subset \mathbb{C}$ liegen. Beschreiben Sie diese Abbildungen auch in "Winkelkoordinaten".

Was sind die Fixpunkte und die periodischen Punkte der Ordnung 2 von

$$g(z) = z^2 - 1 \ ?$$

Was können Sie über die Bahn des Punktes $z_0 = 0$ unter Iteration von g sagen?

Literatur:

D. Salamon, "Funktionentheorie", §1, (S.1–12), erhältlich unter
`http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/cxana.pdf`
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.3 (S.17–21)

3.) Hyperbolizität

Definieren Sie die Begriffe hyperbolischer Fixpunkt, hyperbolischer periodischer Punkt, anziehender Fixpunkt und abstossender Fixpunkt und illustrieren Sie diese Begriffe an den Beispielen

(a) $f_1(x) = \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$,

(b) $f_2(x) = \frac{1}{2}x$ auf $\mathbb{R}$,

(c) $f_3(x) = 2x - \frac{1}{2}\sin(x)$ auf $\mathbb{R}$, und

(d) $f_4(x) = -\frac{1}{2}(x + x^3)$ auf $\mathbb{R}$,

sowie an einem selbst gewählten Beispiel.

Erläutern Sie den Einfluß der Ableitung der Funktion im Fixpunkt auf das Verhalten der Bahnen von Punkten in der Nähe des Fixpunktes. Zeigen Sie am Beispiel $f_5(x) = \sin(x)$ auf $\mathbb{R}$, dass die formulierten Bedingungen nur hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig sind für ein anziehendes bzw. abstoßendes Verhalten.

Diskutieren Sie auch die Kreisabbildungen in Devaneys Beispiel 3.11.

Literatur:
R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, §1.4 (S.24–29) und §1.3 (S.21)

4.) Die quadratische Familie

Führen Sie die quadratische Familie $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$

ein, und begründen Sie, warum für $\mu > 0$ alle dynamisch "interessanten" Bahnen im Intervall $[0, 1]$ liegen.

Beschreiben Sie die Fixpunkte von F_μ und beweisen Sie, dass für $1 < \mu < 3$ der Punkt 0 ein abstossender und der andere ein anziehender Fixpunkt ist, dessen stabile Menge das offene Intervall $(0, 1)$ ist. Folgern Sie daraus, dass es für diese Parameterwerte keine anderen periodischen Bahnen gibt.

Betrachten Sie nun den Parameterwert $\mu_1 = \frac{10}{3}$, und weisen Sie nach, dass für diesen Parameterwert beide Fixpunkte abstossend sind, es aber ein neues Paar anziehende periodische Punkte der Ordnung 2 gibt.

Betrachten Sie schließlich den Parameterwert $\mu_2 = 4$, und untersuchen Sie die Anzahl der periodischen Punkte der Ordnungen 2, 3 und 4 (*Tipp: Zeichnen Sie die Graphen der iterierten Abbildungen mit einer Mathe-Software Ihrer Wahl*). Können Sie eine allgemeine Aussage für die Anzahl der periodischen Punkte der Ordnung n formulieren und beweisen?

Literatur:

R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.5 (S. 31–34)
vgl. auch
H. Zeitler, W. Neidhardt, "Fraktale und Chaos - Eine Einführung", §4 (ab S. 21)

5.) Die Cantor-Menge

Stellen Sie die Konstruktion der Cantor-Menge $C \subset [0,1]$ vor, und diskutieren Sie insbesondere folgende Eigenschaften:

- C enthält genau die Zahlen $x \in [0,1]$, welche bezüglich der Basis 3 von der Form
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{mit } a_k \in \{0,2\}$$
sind.
- C ist nicht abzählbar.
- zwischen je zwei verschiendenen Punkten von C gibt es einen Punkt, der nicht in C liegt. Insbesondere enthält C kein offenes Intervall.
- Jeder Punkt $x \in C$ ist der Grenzwert einer Folge $x_n \in C$ mit $x_n \neq x$.
- C ist selbstähnlich, d.h. jeder Punktes von C ist in beliebig kleinen "reskalierten Kopien" von C enthalten.

Bleiben die letzten vier Eigenschaften erhalten, wenn man in der Konstruktion statt des offenen mittleren Drittels in jedem Schritt irgendein offenes Intervall beliebiger Länge aus jedem Teilintervall entfernt, so dass die Längen der "Restintervalle" immernoch gleichmäßig gegen 0 konvergieren?

Zeigen Sie, dass für $\mu > 2 + \sqrt{5}$ die Teilmenge $\Lambda_\mu \subset [0,1]$ aller Punkte, deren gesamte Bahn bei der Iteration von F_μ im Intervall $[0,1]$ bleibt, eine verallgemeinerte Cantormenge dieser Art ist.

Literatur:

H. Zeitler, S. Pagon, "Fraktale Geometrie - Eine Einführung", Kap. I (S. 4–12)
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.5 (S. 35–39)

6.) Symbolische Dynamik

Führen Sie den Folgenraum Σ_2 ein, diskutieren Sie die Metrik auf diesem Raum und beschreiben Sie die Dynamik der *Translations-Abbildung* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Formulieren Sie den Begriff der dichten Menge, geben Sie Beispiele, und beweisen Sie, dass

- σ expansiv ist,
- σ genau 2^n periodische Punkte der Ordnung n besitzt,
- die periodischen Punkte von σ dicht in Σ_2 liegen, und
- es eine dichte Bahn gibt.

Beschreiben Sie die stabile Menge einer periodischen Bahn und argumentieren Sie, dass diese für jede periodische Bahn dicht in Σ_2 ist.

Wie ändern sich diese Aussagen, wenn man statt dem Folgenraum Σ_2 den Folgenraum Σ_N mit einem Alphabet aus N Symbolen betrachtet?

Literatur:
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.6 (S. 39–43)

7.) Topologische Konjugation

Zeigen Sie, wie man für $\mu > 2 + \sqrt{5}$ jedem Punkt in der Teilmenge $\Lambda_\mu \subset [0,1]$ aller Punkte, deren gesamte Bahn bei der Iteration von F_μ im Intervall $[0,1]$ bleibt, ein eindeutiges Element im Folgenraum Σ_2 zuordnet. Beweisen Sie, dass diese Zuordnung ein Homöomorphismus ist.

Erläutern Sie, dass die so erhaltene Abbildung $S_\mu : \Lambda_\mu \to \Sigma_2$ die Beziehung

$$S_\mu \circ F_\mu = \sigma \circ S_\mu$$

erfüllt. Folgern Sie daraus, dass die dynamischen Eigenschaften von σ und $F_\mu|_{\Lambda_\mu}$ übereinstimmen.

Definieren Sie den Begriff der *topologischen Konjugation*, und diskutieren Sie, welche der folgenden Paare von Abbildungen zueinander konjugiert sein können:

(a) $f(x) = 3x$ und $g(x) = 2x$ auf $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = 3x$ und $g(x) = \frac{1}{3}x$ auf $\mathbb{R}$

Beweisen Sie, dass die Abbildung $h : [0,1] \to [0,1]$, $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi x))$ eine Konjugation zwischen $F_4(x) = 4x(1-x)$ und $T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ beschreibt.

Diskutieren Sie auch die Exponentialabbildung $t \mapsto e^{2\pi i t}$ als Beispiel einer Semi-Konjugation zwischen (z.B.) den Translationen auf $\mathbb{R}$ und den Drehungen des Kreises.

Literatur:
R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, §1.7 (S. 44–47)

8.) Chaos

Führen Sie Devaney's Definition von *Chaos* ein. Geben Sie insbesondere für jede der drei Eigenschaften Beispiele von dynamischen Systemen, welche diese Eigenschaft besitzen, als auch von solchen, die diese Eigenschaft nicht besitzen.

Beweisen Sie, dass $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ chaotisch ist, und folgern Sie, dass auch $F_\mu|_{\Lambda_\mu}$ für $\mu > 2 + \sqrt{5}$ chaotisch ist.

Beweisen Sie auch, dass die Zeltabbildung $T : [0,1] \to [0,1]$ chaotisch ist, und folgern Sie daraus, dass auch F_4 auf ganz $[0,1]$ chaotisch ist.

Diskutieren Sie schließlich das Resultat der Arbeit von Banks et al.

Literatur:

R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.8 (S. 48–51)
J. Banks et al, "On Devaney's definition of chaos", American Mathematical Monthly Vol. 99 (April 1992), 332–334
`http://www.jstor.org/stable/2324899`

9.) Strukturelle Stabilität

Führen Sie den Begriff des C^r-Abstandes zweier Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein, und definieren Sie *strukturelle Stabilität*. Kann es C^0-strukturell stabile Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben?

Diskutieren Sie ausführlich die C^1-Stabilität der Abbildung $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = \frac{1}{2}x$ und die C^1-Stabilität der Abbildung $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^2$.

Erklären Sie auch, dass eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche 0 als hyperbolischen Fixpunkt mit $f'(0) \neq 0$ besitzt, in einem offenen Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ konjugiert zur linearen Abbildung $L(x) = f'(0) \cdot x$ ist.

Literatur:

R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, §1.9 (S. 53–59)
E. Zehnder, “Lectures on Dynamical Systems”, §I.4 (S. 22–26)

10.) Der Satz von Sarkovskii

Formulieren Sie den Satz von Sarkovskii, illustrieren Sie die Aussage an Beispielen und erläutern Sie den Beweis. Diskutieren Sie auch die Konstruktion von Beispielen, welche zeigen, dass die Aussage des Satzes scharf ist, d.h. das es wirklich Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche nur Perioden ab einer vorgegebenen Startperiode bzgl. der Sarkovskii-Ordnung zulassen.

Literatur:

R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, §1.10 (S. 60–68)

11.) Die Schwarzsche Ableitung

Definieren Sie die Schwarzsche Ableitung, und geben Sie Beispiele für Abbildungen mit positiver bzw. negativer Schwarzscher Ableitung.

Diskutieren Sie den Einfluss der Schwarzschen Ableitung auf das Verhalten der periodischen Punkte der Abbildung, und beweisen Sie insbesondere, dass die Funktionen der quadratischen Familie F_μ höchstens eine anziehende periodische Bahn besitzen können.

Zeigen Sie auch, dass für F_4 die abstossenden periodischen Bahnen dicht in $[0, 1]$ liegen.

Literatur:
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.11 (S. 69–80)

12.) Kreisabbildungen

Führen Sie die Rotationszahl eines Kreishomöomorphismus ein und diskutieren Sie Beispiele und fundamentale Eigenschaften. Zeigen Sie insbesondere:

- Die Rotationszahl ist rational genau dann, wenn es periodische Bahnen gibt. Dabei ist die Rotationszahl $\varrho = \frac{p}{q}$ mit $(p, q) = 1$ genau dann, wenn es periodische Bahnen der Ordnung q gibt.
- Jeder Kreishomöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl und einer dichten Bahn ist konjugiert zu einer Rotation.
- Die Rotationszahl ist stetig bzgl. des C^0-Abstandes von Kreishomöomorphismen.

Stellen Sie einige Eigenschaften der Standardfamilie

$$f_{\omega,\varepsilon}(t) = t + 2\pi\omega + \varepsilon \sin(t)$$

vor.

Literatur:
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.14 (S. 102–112)

13.) Morse-Smale-Diffeomorphismen von S^1

Erklären Sie den Begriff eines Morse-Smale-Diffeomorphismus von S^1, konstruieren Sie explizite Beispiele mit genau k anziehenden und k abstossenden periodischen Bahnen der Ordnung n, wobei $k, n \geq 1$. Beweisen Sie außerdem:

- Morse-Smale-Diffeomorphismen von S^1 sind C^1-strukturell stabil.
- Morse-Smale-Diffeomorphismen sind C^r-dicht in den C^r-Diffeomorphismen von S^1.

Literatur:
R. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems", §1.15 (S. 114–121)

14.) Die quadratische Familie im Komplexen - Julia, Fatou und Mandelbrot

Zeigen Sie, dass jede Abbildung der quadratischen Familie

$$\begin{aligned} Q_c : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 + c \end{aligned}$$

zu einer Abbildung aus der quadratischen Familie

$$\begin{aligned} F_\mu : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \mu z(1-z) \end{aligned}$$

konjugiert ist.

Führen Sie die Juliamenge eines komplexen Polynoms ein, und betrachten Sie die Beispiele Q_c mit $c = 0$ und $|c| >> 1$. Diskutieren Sie Eigenschaften der Juliamenge.

Definieren Sie die gefüllte Juliamenge und geben Sie Beispiele. Definieren Sie auch die Mandelbrotmenge, und erklären Sie deren Bedeutung.

Literatur:
R. Devaney, “An introduction to chaotic dynamical systems”, §3.2–3.8 (S. 268–318)