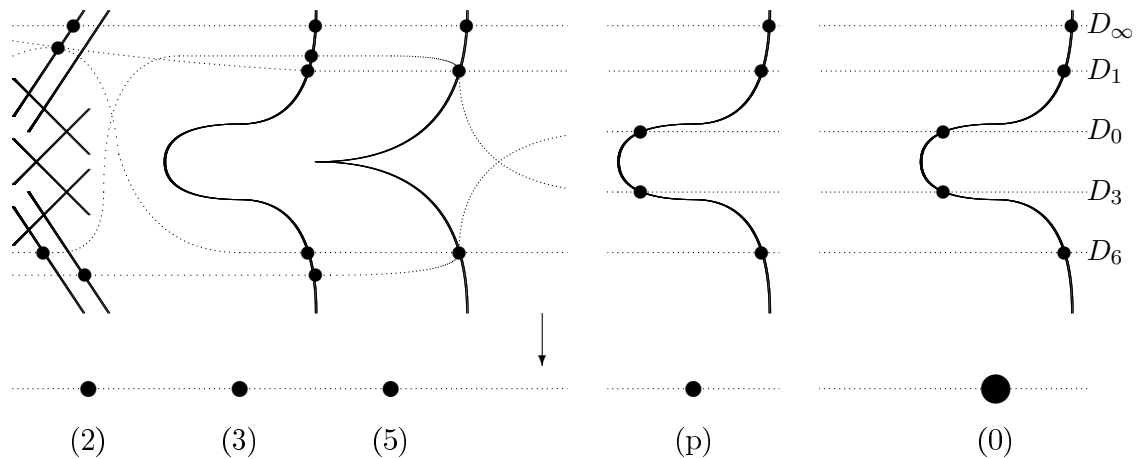


# Effektive Berechnungen von Néron-Tate-Höhen mittels Arakelov-Schnittzahlen



Diplomarbeit

Universität Hamburg  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Department Mathematik

eingereicht von: Vincenz Busch  
geboren am: 08. Oktober 1982 in Hamburg  
1. Gutachter: Prof. Dr. Ulf Kühn  
2. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Ernst Kleinert  
Hamburg, den 17. September 2008



## **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Vincenz Busch



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Arithmetische Flächen und Schnitttheorie</b>	<b>11</b>
1.1	Arithmetische Flächen und Weil Divisoren . . . . .	11
1.2	Auf- und Abblasungen . . . . .	17
1.3	Lokale Definition der Schnittzahl . . . . .	30
1.4	Globale Definition der Schnittzahl . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Modelle von elliptischen Kurven</b>	<b>35</b>
2.1	Das Weierstraßmodell . . . . .	36
2.2	Das minimale, reguläre, eigentliche Modell . . . . .	41
2.3	Konstruktion des minimalen, regulären, eigentlichen Modells . . . . .	42
2.4	Die spezielle Faser des minimalen, regulären, eigentlichen Modells . . . . .	44
2.5	Der Schnittpunkt horizontaler Primdivisoren mit der speziellen Faser . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Kühns Formel für die Néron-Tate-Höhe</b>	<b>49</b>
3.1	Die Néron-Tate-Paarung . . . . .	49
3.2	„Klassische“ Arakelov-Theorie . . . . .	52
3.3	Der Zusammenhang zwischen Arakelov-Schnittzahl und der kanonischen Höhe . . . . .	57
3.4	Kühns Formel zur Berechnung der Néron-Tate-Höhe . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Schnittzahlenberechnung zur Kurve 400H1</b>	<b>61</b>
4.1	Bestimmung des minimalen Modells für 400H1 . . . . .	61
4.2	Die Schnittmatrix der Komponenten der Faser über 2 . . . . .	72
4.3	Reduktion der Punkte auf 400H1 modulo 2 . . . . .	72
4.4	Reduktion der Punkte auf 400H1 außerhalb 2 . . . . .	75
4.5	Die lokalen Schnittzahlen . . . . .	77
4.6	Der algebraische Anteil der Schnittzahlen . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Néron-Tate-Höhenberechnung zur Kurve 400H1</b>	<b>83</b>
5.1	Der analytische Anteil der Arakelov-Schnittzahl . . . . .	83
5.2	Die Néron-Tate-Höhenpaarung der Divisoren mittels Pari . . . . .	85
5.3	Relationen der Néron-Tate-Höhe . . . . .	88
5.4	Ein Beispiel zu Satz 3.37 . . . . .	89
5.5	Schlusswort . . . . .	89
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>92</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>93</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>94</b>

## 0 Einleitung

Die Néron-Tate-Höhe ist eine Paarung für Divisoren von Grad Null auf einer algebraischen Kurve, die über einen Zahlkörper definiert ist. Sie gibt in gewisser Weise eine Abschätzung für die arithmetische Komplexität der Kurve und wird z.B. im Beweis des Satzes von Mordell-Weil benötigt. Néron-Tate-Höhen treten auch als eine Größe in der Formulierung der Birch und Swinnerton-Dyer Vermutung<sup>1</sup> auf. Die Néron-Tate-Höhe ist bislang nur für elliptische Kurven algorithmisch berechenbar. Diese Arbeit beschreibt in einem Beispiel, wie man sie mittels verallgemeinerten Arakelov-Schnittzahlen berechnet. Dieses Verfahren beruht auf Belyi-Morphismen und kann zur Berechnung der Höhenpaarung auf allgemeinen algebraischen Kurven benutzt werden.

Das Beispiels benutzt einen Satz von Ulf Kühn. Er gibt eine Darstellung der Néron-Tate Höhe als eine Linearkombination von rationalen Zahlen multipliziert mit dem Logarithmus von Primzahlen und reellen Zahlen, den so genannten Streukonstanten. Diesen Satz besprechen wir ausführlich in Kapitel 3.4.

**Satz (Kühn)** Sei  $\mathcal{C}_K$  eine geometrisch irreduzible Kurve definiert über einem Zahlkörper  $K$ . Seien  $D_1 = \sum_j n_j S_j$ ,  $D_2 = \sum_k m_k S_k$  zwei Divisoren auf  $\mathcal{C}_K$  vom Grad 0. Man wähle einen Belyi Morphismus  $\beta : \mathcal{C}_K \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ , so dass  $D_1$  und  $D_2$  Spitzendivisoren sind auf  $\mathcal{C}_K$ . Weiter sei  $C_\sigma(\mathbb{C}) \cong X(\Gamma_\sigma)$  die induzierte Belyi-Uniformisierung. Dann existiert die folgende Formel für die Néron-Tate Höhenpaarung  $\langle D_1, D_2 \rangle_{NT}$  für die Klassen  $D_1, D_2 \in \text{Div}_0(\mathcal{C}_K)$

$$- \langle D_1, D_2 \rangle_{NT} = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_\beta \cup \mathcal{P}_\mathcal{C}} \delta_\nu \log N_\nu + \frac{2\pi}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \sum_{j,k} n_j m_k C_{jk}^\sigma \right),$$

wobei die  $\delta_\nu$  explizit berechenbare rationale und die  $C_{jk}^\sigma$  reelle Zahlen sind. Die  $C_{jk}^\sigma$  sind die Streukonstanten der Gruppen  $\Gamma_\sigma$ .

□

Der Satz begründet sich auf ein Ergebnis von Hriljac und Faltings (siehe Kapitel 3 insbesondere Satz 3.23), das eine Beziehung zwischen der Néron-Tate Höhenpaarung und der Arakelov Schnittzahl besagt. Die rechte Seite im Satz von Kühn ist eine “explizitere” Berechnung dieser Schnittzahl, die man in den algebraischen (oder endlichen) Anteil

$$(D_1 \cdot D_2)_{alg} = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_\beta \cup \mathcal{P}_\mathcal{C}} \delta_\nu \log N_\nu$$

und den analytischen Anteil

$$(D_1 \cdot D_2)_\infty = \frac{2\pi}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \sum_{j,k} n_j m_k C_{jk}^\sigma \right)$$

<sup>1</sup>Diese ist ein Millennium Problem des Clay Mathematics Institute;  
[http://www.claymath.org/millennium/Birch\\_and\\_Swinnerton-Dyer\\_Conjecture](http://www.claymath.org/millennium/Birch_and_Swinnerton-Dyer_Conjecture)

aufteilen kann.

Anna Posingies hat sich in ihrer Diplomarbeit (siehe [Po]) mit der Berechnung des analytischen Anteils und damit insbesondere mit Streukonstanten beschäftigt, wobei sie in einem Beispiel konstruktiv die Gruppen  $\Gamma_\sigma$  berechnet.

In dieser Arbeit berechnen wir für dieselbe Kurve die rationalen Zahlen  $\delta_\nu$  und bekommen so das erste Beispiel für die Berechnung der Néron-Tate-Höhen mittels Belyi-Morphismen.

Diese Arbeit erfordert umfangreiche Vorkenntnisse in algebraischer Geometrie. Eine ausreichende Einführung in dieses Gebiet geben [Ha] Kapitel II und [Li].Kapitel 1 - 7.

Die Kapitel 1 und 2 beschäftigen sich mit dem theoretischen Unterbau dieser Diplomarbeit und folgen dabei [Si2] Kapitel IV und [Li] Kapitel 8 - 10. Eine arithmetische Fläche ist ein zweidimensionales Schema mit bestimmten Eigenschaften. Das wichtigste Werkzeug um arithmetische Flächen zu konstruieren ist die Aufblasung. Eine Aufblasung ist ein bestimmtes Schema und eine birationale Abbildung mit der Eigenschaft, dass das neue Schema im Gegensatz zum Ausgangsschema „regulärer“ ist. Auf arithmetischen Flächen definiert man Schnittzahlen lokal für Primdivisoren als Längen der Quotienten der lokalen Ringe modulo den Idealen, welche von den lokalen Gleichungen erzeugt werden. Die globale Schnittzahl ist die Summe der lokalen Schnittzahlen und man setzt diese bilinear für beliebige Divisoren fort.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns damit, für eine bestimmte Kurve eine arithmetische Fläche zu finden, deren generische Faser mit der gegebenen Kurve übereinstimmt. Eine solche Fläche nennt man (reguläres eigentliches) Modell. Wir werden sehen das für nichtsinguläre algebraische Kurven ein solches Modell immer existiert und für Kurven von Geschlecht größer als Null sogar ein ausgezeichnetes minimales Modell existiert. Das Kapitel 2 widmet sich außerdem dem Thema, wie solche Modelle konstruiert und die speziellen Fasern klassifiziert werden können.

Das Kapitel 3 behandelt Arakelov-Theorie. Es beginnt mit der Definition der kanonischen Höhe auf einer elliptischen Kurve und der aus ihr resultierenden Bilinearform der Néron-Tate-Höhenpaarung, welche sich auf der linken Seite des Satzes 3.37 findet. Danach widmet sich das Kapitel den Arakelov-Divisoren für die wir die klassische Schnittzahl erweitern werden und mit deren Hilfe man die Beziehung zwischen der Néron-Tate-Höhe und der Arakelov-Schnittzahl formulieren kann. Zum Abschluss des Kapitel gehen wir ausführlich auf den Satz von Kühn ein.

Das Kapitel 4 beschreibt meine Berechnungen der algebraischen Schnittzahlen für Spitzendivisoren auf der Kurve

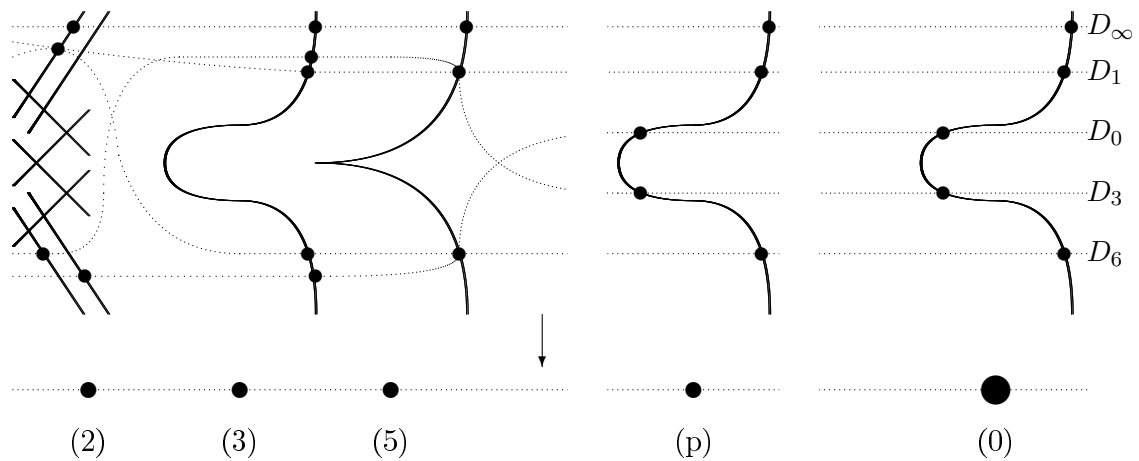
$$E : y^2 = x^3 + 5x + 10.$$

Diese Ergebnisse werden in Kapitel 5 mit der analytischen Schnittzahl und der Néron-Tate-Höhe zusammengefasst und ausgewertet.

Die Hauptleistung dieser Arbeit liegt in der Berechnung der algebraischen Schnittzahlen für ein konkretes Beispiel. Die Herausforderung der Berechnung lag in der Anwendung eines in der Literatur weitgehend abstrakt behandelten Themengebietes auf eine durch

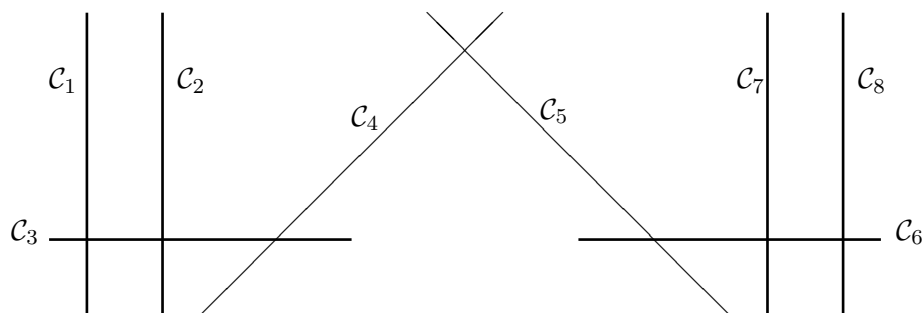
Gleichungen gegebene Kurve. Die Konstruktion des minimalen, regulären, eigentlichen Modells war umfangreich, da man bei jeder Aufblasung mehrere affine Karten betrachtet. Bei diesen Berechnungen war es wichtig, das in jedem Schritt die Reduktion von vorgegebenen Punkten genau zu verfolgen. Darum konnte ich bereits implementierte Algorithmen nicht verwenden. Nur die Kombination von detaillierter Berechnung mit Tricks aus der kommutativen Algebra machte diese Ergebnisse möglich.

In unserem Beispiel wird sich das folgende minimale, reguläre, eigentliche Modell ergeben.



Die Divisoren  $D_i$  in der Zeichnung sind die Zariski-Abschlüsse von Punkten  $S_i$  der Kurve  $E$ .

Man sieht, dass die Faser über (2) die einzige Faser mit mehreren Komponenten ist. In dieser Faser gibt es acht Komponenten  $C_1$  bis  $C_8$ , die wir wie auf folgendem Bild durchnummerieren.



Für die Schnittmatrix der Faser, die man bei der Berechnung des algebraischen Anteils benötigt, ergibt sich:



	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$2 \cdot \mathcal{C}_3$	$2 \cdot \mathcal{C}_4$	$2 \cdot \mathcal{C}_5$	$2 \cdot \mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$	$\mathcal{C}_8$
$\mathcal{C}_1$	-2	0	2	0	0	0	0	0
$\mathcal{C}_2$	0	-2	2	0	0	0	0	0
$2 \cdot \mathcal{C}_3$	2	2	-8	4	0	0	0	0
$2 \cdot \mathcal{C}_4$	0	0	4	-8	4	0	0	0
$2 \cdot \mathcal{C}_5$	0	0	0	4	-8	4	0	0
$2 \cdot \mathcal{C}_6$	0	0	0	0	4	-8	2	2
$\mathcal{C}_7$	0	0	0	0	0	2	-2	0
$\mathcal{C}_8$	0	0	0	0	0	2	0	-2

Für Divisoren, die sich in den Fasern schneiden, habe ich die lokalen Schnittzahlen ausgerechnet. Aus der ersten Zeichnung wird ersichtlich, dass sich die Divisoren  $D_1$  und  $D_6$  in der Faser über (2) schneiden. Wir bezeichnen den Punkt mit  $P_{16}$ . Ebenso schneiden sich die Divisoren  $D_1$  und  $D_3$ , sowie die Divisoren  $D_0$  und  $D_6$  in der Faser über (5). Wir bezeichnen ihre Schnittpunkte mit  $P_{13}$  und  $P_{06}$ .

Für die lokalen Schnittzahlen ergibt sich:

$$(D_1 \cdot D_6)_{P_{16}} = 5;$$

$$(D_1 \cdot D_3)_{P_{13}} = 1;$$

$$(D_0 \cdot D_6)_{P_{06}} = 1.$$

Mit diesen Informationen ist es nur noch ein Problem der linearen Algebra, alle Möglichkeiten für die Schnitte zweier Divisoren von Grad Null mit Träger  $S_0$  bis  $S_\infty$  zu berechnen.

Zum Beispiel ergibt sich unter Benutzung der obigen Erkenntnisse für den algebraischen Anteil der Arakelov-Schnittzahl für die Divisoren  $S_{01} = S_0 - S_1$  und  $S_{36} = S_3 - S_6$  der Wert

$$(S_{01} \cdot S_{36})_{alg} = \frac{25}{4} \log(2) - 2 \log(5) \approx 1.113294.$$

In Kapitel 5 arbeiten wir mit diesen Schnittzahlen ein Beispiel für Satz 3.37 aus. Dafür benötigen wir neben den algebraischen Schnittzahlen noch die analytischen Schnittzahlen und die Néron-Tate-Höhe.

Wie eingangs erwähnt, wurden die Berechnungen der analytischen Schnittzahlen von Anna Posingies in ihrer Diplomarbeit [Po] behandelt. Die Néron-Tate-Höhe auf elliptischen Kurven kann mit dem Computeralgebra-Programm Pari berechnet werden.

So ergibt sich zum Beispiel für den analytischen Anteil der Arakelov-Schnittzahl der beiden Divisoren  $S_{01}$  und  $S_{36}$  der ungefähre Wert

$$(S_{01} \cdot S_{36})_\infty \approx 0,040391$$

und für die Néron-Tate-Höhe

$$\langle S_{01}, S_{36} \rangle_{NT} \approx -1,155376.$$

Für die Arakelov-Schnittzahl ergibt sich also der Wert

$$(S_{01} \cdot S_{36}) \approx 1.113294 + 0,040391 = 1.153685.$$

Wie man sieht ist

$$|(S_{01} \cdot S_{36}) + \langle S_{01}, S_{36} \rangle_{NT}| \approx 0.001691 < 2 \cdot 10^{-3}.$$

Obwohl der algebraische Anteil exakt ist und die Néron-Tate-Höhe von Pari beliebig genau berechnet werden kann, wussten wir nicht, wie gut das Ergebnis werden würde, da über die Genauigkeit des analytischen Anteils nichts bekannt ist. Der analytische Anteil ergibt sich durch unendliche Reihen, für die Anna Posingies die ersten 500 Summanden ausgerechnet hat. Eine Fehlerabschätzung hierzu gibt es bislang nicht. Es ist zu beachten, dass Pari die Néron-Tate-Höhe mittels der Definition (vgl. Definition 3.3) berechnet, während wir sie mittels Arakelov-Schnittzahlen berechnen. Für elliptische Kurven ist dieser Weg also nur eine Alternative zur Berechnung der Néron-Tate-Höhe. Für Kurven mit Geschlecht größer eins gibt es bis jetzt aber noch keinen Algorithmus zur Berechnung der Néron-Tate-Höhe. Die Resultate dieser Arbeit in Kombination mit den Ergebnissen von Anna Posingies zeigen, dass die Berechnung der Néron-Tate-Höhe mittels Arakelov-Schnittzahlen ein aufwendiger aber doch gangbarer Weg ist.

Mein herzlicher Dank gilt zuallererst Herrn Prof. Dr. Ulf Kühn für seine umfangreiche und engagierte Betreuung. Weiter bedanke ich mich bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Ernst Kleinert für seine zahlreichen Anregungen und Bemerkungen. Unter den vielen anderen, die mich in der Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt haben möchte ich noch zwei besonders hervorheben. Christian Curilla hat mir mit seinem offenen Ohr häufig den entscheidenden Hinweis für meine Probleme gegeben. Anna Posingies hat die analytischen Schnittzahlen berechnet, die in dieser Diplomarbeit eine so wichtige Rolle einnehmen. Zuletzt danke ich allen Korrekturlesern für das Aufspüren von kleinen Fehlern.

# 1 Arithmetische Flächen und Schnitttheorie

In diesem Kapitel legen wir die theoretischen Grundlagen für den Rest dieser Arbeit. Wir beginnen mit dem zentralen Objekt, den arithmetischen Flächen.

## 1.1 Arithmetische Flächen und Weil Divisoren

Sei

$K$  ein Zahlkörper

$M_K$  die Menge aller Bewertungen auf  $K$

$M_K^\infty$  die Menge aller archimedischen Bewertungen auf  $K$

$M_K^0$  die Menge aller nichtarchimedischen Bewertungen auf  $K$

$\nu(x) = -\log|x|_\nu$  die Exponentialbewertung  $\nu \in M_K$

$R$  der Ring der ganzen Zahlen von  $K$  ( $R = \{x \in K \mid \nu(x) \geq 0 \text{ für alle } \nu \in M_K^0\}$ )

$R^*$  die Einheitengruppe von  $R$  ( $R^* = \{x \in K \mid \nu(x) = 0 \text{ für alle } \nu \in M_K^0\}$ )

$K_\nu$  die Kompletterung von  $K$  in  $\nu \in M_K$

Weiter definieren wir für alle  $\nu \in M_K^0$ :

$R_\nu$  der Ring der ganzen Zahlen von  $K_\nu$  ( $R_\nu = \{x \in K_\nu \mid \nu(x) \geq 0\}$ )

$ord_\nu$  die normalisierte Bewertung von  $\nu$  (d.h.  $ord_\nu(K^*) = \mathbb{Z}$ )

$\mathfrak{m}_\nu$  das maximale Ideal von  $R_\nu$  ( $\mathfrak{m}_\nu = \{x \in K_\nu \mid \nu(x) > 0\}$ )

$\pi_\nu$  ein lokaler Parameter von  $\mathfrak{m}_\nu$  ( $\mathfrak{m}_\nu = (\pi_\nu)$ )

$k_\nu$  der Restklassenkörper  $R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$  ( $k_\nu = R_\nu/\mathfrak{m}_\nu$ )

$N_\nu$  Die Anzahl der Elemente in  $k_\nu$  ( $N_\nu = |k_\nu|$ )

In diesem Kapitel betrachten wir nur  $\nu \in M_K^0$ . Diese  $\nu$  stehen in 1 – 1-Beziehung mit den Primidealen  $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\nu \in \text{Spec } R$ .

**Definition 1.1** (siehe [La] III, §1) Eine arithmetische Fläche  $\mathcal{C}/R$  ist ein projektives, reguläres, flaches  $R$ -Schema der Dimension 2 mit der Eigenschaft, dass die generische Faser  $\mathcal{C}_{(0)}$  eine nichtsinguläre Kurve ist. Die Abbildung  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec } R$  heißt natürliche Abbildung der arithmetischen Fläche.

Die Strukturgarbe der arithmetischen Fläche  $\mathcal{C}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{O}$ .

**Bemerkung 1.2** Arithmetische Flächen sind immer projektive Schemata. Aus Gründen der Übersichtlichkeit betrachten wir aber meistens nur affine Karten.

**Definition 1.3** Sei  $S = \text{Spec } R$  und  $X \rightarrow S$  ein  $S$ -Schema. Wir bezeichnen die Menge der  $R$ -rationalen Punkte von  $X$  als die Menge

$$X(R) = \text{Hom}_S(S, X).$$

**Bemerkung 1.4** Allgemein werden wir in dieser Arbeit nur die abgeschlossenen Punkte des unterliegenden Schemas als Punkte der arithmetischen Fläche bezeichnen. Betrachten wir auch die nichtabgeschlossenen Punkte des Schemas, so werden wir dies explizit hinzu schreiben.

**Definition 1.5** Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}_K = \mathcal{C} \times_R \text{Spec } K$  die generische Faser und mit  $\mathcal{C}_\nu = \mathcal{C} \times_R \text{Spec } k_\nu$  die spezielle Faser von  $\nu$ . Weiter bezeichnen wir für einen Punkt  $P \in \mathcal{C}_K$  mit  $\overline{P} \subset \mathcal{C}$  den Zariski-Abschluss von  $P$  in  $\mathcal{C}$ .

Die lokalen Ringe der Punkte einer arithmetischen Fläche sind ein wichtiges Instrument für uns.

**Definition 1.6** Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche und  $P$  ein nicht notwendigerweise abgeschlossener Punkt auf  $\mathcal{C}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathcal{O}_P$  den Halm von  $\mathcal{O}$  in  $P$ , das ist die Menge aller Keime von Schnitten in  $P$ . Der Halm  $\mathcal{O}_P$  ist ein lokaler Ring und wir bezeichnen das maximale Ideal mit  $\mathfrak{m}_P$ . Wir nennen  $\mathcal{O}_P$  den lokalen Ring von  $\mathcal{C}$  in  $P$ . Den Körper  $k(P) = \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P$  bezeichnen wir als Restklassenkörper von  $P$ .

**Satz 1.7** Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche und  $P$  ein (nicht notwendigerweise abgeschlossener) Punkt auf  $\mathcal{C}$ . Für jede offene, affine Umgebung  $U$  von  $P$  gilt

$$\mathcal{O}_P \cong \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}(U), g \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \right\} = \mathcal{O}(U)_{\langle \mathfrak{p} \rangle} = T^{-1}\mathcal{O}(U),$$

wobei  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(U)$  das Ideal mit  $P = \mathfrak{p} \in U$  und  $T = \mathcal{O}(U) \setminus \mathfrak{p}$  ist.

□

**Bemerkung 1.8** Zur Unterscheidung von Lokalisierungen und lokalen Ringen, schreiben wir in dieser Arbeit grundsätzlich Lokalisierungen mit spitzen Klammern. Außerdem schreiben wir, falls  $(p) = \mathfrak{p}$  und Unklarheiten ausgeschlossen sind, auch  $\mathcal{O}_{\langle p \rangle}$  anstelle von  $\mathcal{O}_{\langle (p) \rangle}$ .

**Definition 1.9** Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche und  $\xi \in \mathcal{C}$  ihr generischer Punkt. Wir definieren den Funktionenkörper<sup>2</sup>  $K(\mathcal{C})$  von  $\mathcal{C}$  als

$$K(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_\xi.$$

**Bemerkung 1.10** Für jeden Punkt  $P \in \mathcal{C}$  gilt

$$\text{Quot } \mathcal{O}_P = K(\mathcal{C})$$

Arithmetische Flächen erfüllen ein paar wichtige Eigenschaften.

**Satz 1.11** Arithmetische Flächen sind eigentliche, normale und nullteilerfreie Schemata.

**Beweis** Als projektive Schemata sind arithmetische Flächen eigentlich.

Nach dem Kriterium von Serre ([Li] Theorem 8.2.23) sind arithmetische Flächen normal und damit insbesondere auch nullteilerfrei.

---

<sup>2</sup>Da  $\mathcal{C}$  nullteilerfrei ist, ist der Funktionenkörper tatsächlich ein Körper

□

Wir erinnern uns an die Bedeutung der Eigenschaften einer arithmetischen Fläche.

**Bemerkung 1.12 (projektiv)** Sei  $\mathbb{P}_R^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } R$ . Ein projektives  $R$ -Schema ist ein  $R$ -Schema  $\mathcal{C}$ , sodass die Abbildung  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec } R$  sich faktorisieren lässt in eine abgeschlossene Immersion  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_R^n$ , für ein  $n \in \mathbb{N}$ , und eine Projektion  $\mathbb{P}_R^n \rightarrow \text{Spec } R$ .

**(regulär)** Sei  $P \in \mathcal{C}$ . Der Quotient  $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \mathfrak{m}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} k(P)$  ist ein  $k(P)$  Vektorraum. Sein Dualraum  $(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^\vee$  heißt der Tangentialraum von  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{P}$ . Wir bezeichnen ihn mit  $T_P$ .

$\mathcal{C}$  heißt regulär, wenn die Dimension von  $\mathcal{C}$  in jedem Punkt mit der Dimension des Tangentialraumes übereinstimmt, also wenn für jeden Punkt  $P$  mit lokalem Ring  $\mathcal{O}_P$  und maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_P$  gilt

$$\dim \mathcal{O}_P = \dim_{k(P)} T_P = \dim_{k(P)} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2.$$

Die Dimension des lokalen Ringes  $\dim \mathcal{O}_P$  ist dabei die Krulldimension, also das Supremum aller Längen von Ketten von Primidealen.

**(flach)** Eine arithmetische Fläche  $\mathcal{C}$  heißt flach, falls  $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$  ein flacher  $\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \pi(P)}$ -Modul ist. Das heißt für jeden Punkt  $P \in \mathcal{C}$  und jeden Monomorphismus  $A \rightarrow B$  von  $\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \pi(P)}$ -Moduln ist der induzierte Morphismus

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C},P} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \pi(P)}} A \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C},P} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Spec } R, \pi(P)}} B$$

ebenfalls ein Monomorphismus.

**(eigentlich)** Eine arithmetische Fläche heißt eigentlich, falls die Abbildung  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec } R$  separiert, von endlichen Typ und universell abgeschlossen ist. Ohne näher auf diese Eigenschaften einzugehen<sup>3</sup>, ist „eigentlich“ das algebraische Analogon zu „kompakt“ und „Hausdorffsch“<sup>4</sup>.

**(normal)** Man nennt ein Schema normal, wenn alle lokalen Ringe ganz abgeschlossen sind.

**(nullteilerfrei)** Man nennt ein Schema  $(X, \mathcal{O}_X)$  nullteilerfrei, wenn für jede offene Menge  $U \subset X$ , der Ring  $\mathcal{O}_X(U)$  ein Integritätsring ist.

Betrachten wir jetzt arithmetische Flächen, so kann man fordern, dass keine Faser singuläre Punkte besitzt. Man kommt so zu dem Begriff der glatten arithmetischen Fläche.

**Definition 1.13** Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche und  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \text{Spec } R$  die natürliche Abbildung. Dann heißt  $\mathcal{C}/R$  glatt, falls  $\pi$  in jedem Punkt glatt ist. Eine Abbildung  $\phi : X \rightarrow S$  von endlichen Typ zweier Schemata  $X$  und  $S$ , nennt man glatt (von relativer Dimension  $r$ ) in  $x \in X$ , falls es affine offene Umgebungen

$$s = \phi(x) \in \text{Spec } B \subset S \text{ und } x \in \text{Spec } A \subset X$$

<sup>3</sup>siehe [Ha] II.4

<sup>4</sup>siehe [Si2] Seite 301 Intuitive ‘Definitions’

mit einer Darstellung

$$A = B[t_1, \dots, t_{n+r}] / (f_1, \dots, f_n) \text{ mit } f_1, \dots, f_n \in B[t_1, \dots, t_{n+r}]$$

gibt, sodass die  $n \times n$ -Minoren der Jacobimatrix  $(\partial f_i / \partial t_j)$  das Einseideal in  $A$  erzeugen.

Weiter bezeichnen wir mit  $C^0$  das größte Unterschema von  $C$ , für das die Abbildung  $C^0 \rightarrow \text{Spec } R$  eine glatte Abbildung ist.

Eine glatte arithmetische Fläche ist eine eindimensionale Familie von regulären Schemata. Es stellt sich heraus, dass Glattheit eine starke Eigenschaft ist, die die wenigsten arithmetischen Flächen, mit denen wir arbeiten, erfüllen.

Wir haben also neben den nichtregulären Punkten auch noch singuläre Punkte auf dem Schema.

**Definition 1.14** Sei  $C/R$  ein Schema,  $P$  ein Punkt auf  $C$ . Wir nennen  $P$  *singulär*, falls  $P$  ein nichtglatter Punkt von  $C$  ist.

**Lemma 1.15** Sei  $C$  eine arithmetische Fläche und  $P \in C$  ein nichtsingulärer Punkt. Dann ist  $P$  auch ein regulärer Punkt. □

Die Umkehrung gilt dagegen nicht, wie das Beispiel 1.18 zeigen wird.

Zuerst benötigen wir aber noch einen Satz. Er ist unser Standardwerkzeug, um festzustellen, ob ein Punkt regulär ist oder nicht.

**Satz 1.16** (siehe [Li] Corollary 4.2.12) Sei  $(A, \mathfrak{m})$  ein regulärer, Noetherscher lokaler Ring und  $f \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ . Der Quotient  $A/fA$  ist genau dann regulär, wenn  $f \notin \mathfrak{m}^2$ . □

Ein wichtiger Satz in diesem Zusammenhang besagt, dass man die Lokalisierung und die Quotientenbildung vertauschen kann.

**Satz 1.17** (siehe [Ma] Theorem 4.2) Sei  $A$  ein Ring,  $T \subset A$  eine multiplikative Menge,  $I \subset A$  ein Ideal und  $\bar{T}$  das Bild von  $T$  in  $A/I$ . Dann gilt

$$A_{\langle T \rangle} / IA_{\langle T \rangle} \cong (A/I)_{\langle \bar{T} \rangle}.$$

□

**Beispiel 1.18** Sei  $C/\mathbb{Z}$  die arithmetische Fläche gegeben durch die Gleichung

$$f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60 = 0,$$

also

$$\mathcal{C} = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60).$$

Wir überprüfen  $\mathcal{C}$  auf singuläre Punkte und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 2x + 32, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Sucht man die Nullstellen der partiellen Ableitungen findet man folgende Punkte:

- a) Für (2) verschwinden die partiellen Ableitungen in dem Punkt  $P_2 = V((x, y, 2))$ .
- b) Für (3) verschwinden die partiellen Ableitungen in dem Punkt  $P_3 = V((x - 1, y, 3))$ .

Mit Hilfe der Diskriminante in Kapitel 2 werden wir später sehen, dass die die einzigen beiden singulären Punkte des Schemas sind.

Für die lokalen Ringe ergibt sich, wenn man Quotientenbildung und Lokalisierung vertauscht und gegebenenfalls noch faktorisiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{P_2} &= (\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60))_{\langle (x, y, 2) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x, y, 2) \rangle} / (y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60). \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{O}_{P_2}$  nach Satz 1.16 nichtregulär, da  $\mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x, y, 2) \rangle}$  ein regulärer, Noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_{P_2} = (x, y, 2)$  und  $f = (y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60) \in \mathfrak{m}_{P_2}^2$  ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{P_3} &= (\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60))_{\langle (x-1, y, 3) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x-1, y, 3) \rangle} / (y^2 - (x+3)(x-1)^2 + 27(x-1) - 30) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{O}_{P_3}$  nach Satz 1.16 regulär, da  $\mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x-1, y, 3) \rangle}$  ein regulärer, Noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_{P_3} = (x - 1, y, 3)$  und  $f = (y^2 - (x + 3)(x - 1)^2 + 27(x - 1) - 30) \in \mathfrak{m}_{P_3} \setminus \mathfrak{m}_{P_3}^2$  ist.

Also ist der Punkt  $P_2$  nichtregulär und der Punkt  $P_3$  regulär.

Eine arithmetische Fläche  $\mathcal{C}$  ist normal und Noethersch, also kann man Weil-Divisoren definieren ([Ha] II §6).

Ein Primdivisor (oder irreduzibler Divisor)  $D$  ist ein eindimensionales, abgeschlossenes, nullteilerfreies Unterschema, also eine Kurve auf  $\mathcal{C}$ . Mit Hilfe von Primdivisoren können wir nun die Definitionen formulieren.

**Definition 1.19** a) Ein (Weil) Divisor ist eine formale Summe von Primdivisoren.

b) Die Gruppe aller Divisoren heißt Divisorengruppe  $\text{Div}(\mathcal{C})$ .

c) Ein Primdivisor  $D$ , für den gilt  $\pi(D) = \text{Spec}(R)$ , heißt horizontaler Primdivisor.

- d) Ein Primdivisor  $D$ , für den gilt  $\pi(D) = \mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ , heißt vertikaler Primdivisor.  
 e) Ein Divisor  $D = \sum n_i D_i$  heißt horizontaler (bzw. vertikaler) Divisor, falls alle  $D_i$  horizontal (bzw. vertikal) sind.

f) Die Gruppe der horizontalen Divisoren von  $\mathcal{C}$  wird bezeichnet mit

$$\text{Div}_h(\mathcal{C}) = \{D \in \text{Div}(\mathcal{C}) \mid D \text{ ist horizontal}\}.$$

g) Die Gruppe der vertikalen Divisoren von  $\mathcal{C}$  wird bezeichnet mit

$$\text{Div}_v(\mathcal{C}) = \{D \in \text{Div}(\mathcal{C}) \mid D \text{ ist vertikal}\}.$$

h) Für jede Faser  $\mathcal{C}_\nu$  mit  $\nu \in M_K^0$  definieren wir die Gruppe  $\text{Div}_\nu(\mathcal{C})$ , der vertikalen Divisoren der Faser  $\mathcal{C}_\nu$ , als

$$\text{Div}_\nu(\mathcal{C}) = \{D \in \text{Div}(\mathcal{C}) \mid \pi(D) = \mathfrak{m}_\nu\}.$$

i) Die Gruppe der Divisoren vom Grad Null wird bezeichnet mit  $\text{Div}_0(\mathcal{C})$ .

Es ist zu beachten, dass ein Primdivisor immer entweder horizontal oder vertikal ist. Allgemein muss ein Divisor natürlich weder horizontal noch vertikal sein, falls er sowohl horizontale als auch vertikale Primdivisoren enthält. Daher gibt es für jeden Divisor  $D$  eine Zerlegung  $D = D_h + D_v$  von  $D$  in einen horizontalen Anteil  $D_h \in \text{Div}_h(\mathcal{C})$  und einen vertikalen Anteil  $D_v \in \text{Div}_v(\mathcal{C})$ .

Wichtig für unsere Anwendungen sind insbesondere die lokalen Ringe von Primdivisoren.

**Definition 1.20** Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche,  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  ein Primdivisor und  $P \in \mathcal{C}$  der (nicht abgeschlossene) generische Punkt von  $D$ , d.h.  $\overline{P} = D$ . Dann definieren wir den lokalen Ring  $\mathcal{O}_D$  als

$$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_P.$$

**Bemerkung 1.21** Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche und  $D$  ein Primdivisor. Dann ist der lokale Ring  $\mathcal{O}_D$  von  $D$  ein diskreter Bewertungsring. Sei  $P \in \mathcal{C}$  der generische Punkt von  $D$  und  $U \subset \mathcal{C}$  eine offene affine Umgebung von  $P$ . Sei  $P = \mathfrak{p} \in U$ .

Dann gilt

$$\mathcal{O}_D \cong \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}(U), g \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \right\} = \mathcal{O}_{\langle \mathfrak{p} \rangle} = T^{-1}\mathcal{O}$$

mit  $T = \mathcal{O} \setminus \mathfrak{p}$ .

Weiter assoziieren wir nun zu jeder nicht überall verschwindenden Funktion  $f \in K(\mathcal{C})$  einen Divisor.

**Definition 1.22** Sei  $D \subset \mathcal{C}$  ein Primdivisor. Nach der Bemerkung ist der lokale Ring  $\mathcal{O}_D$  ein diskreter Bewertungsring. Wir bezeichnen die zugehörige Bewertung mit

$$\text{ord}_D : K(\mathcal{C})^* \rightarrow \mathbb{Z}.$$



**Definition 1.23** Sei  $f \in K(\mathcal{C})$  eine nicht verschwindende Funktion. Der zu  $f$  assoziierte Divisor  $\text{div}(f)$  ist definiert durch

$$\text{div}(f) = \sum_D \text{ord}_D(f)D \in \text{Div}(\mathcal{C}).$$

Ein Divisor, der zu einer Funktion assoziiert ist, heißt Hauptdivisor.

**Definition 1.24** Zwei Divisoren  $D_1, D_2 \in \text{Div}(\mathcal{C})$  heißen linear äquivalent, falls ihre Differenz ein Hauptdivisor ist. Wir schreiben

$$D_1 \simeq D_2.$$

## 1.2 Auf- und Abblasungen

Sei  $A$  ein Noetherscher Ring,  $I$  ein Ideal von  $A$  und betrachten wir die graduierte  $A$ -Algebra

$$\tilde{A} = \bigoplus_{d \geq 0} I^d, \text{ wobei } I^0 := A.$$

Sei  $f_1, \dots, f_n$  ein System von Erzeugern für  $I$ . Sei  $t_i \in I = \tilde{A}_1$  das Element  $f_i$  betrachtet als homogenes Element von Grad 1, nicht zu verwechseln mit dem Element  $f_i \in A = \tilde{A}_0$  von Grad 0. Es gibt einen surjektiven Homomorphismus von graduierten  $A$ -Algebren

$$\phi : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \tilde{A}$$

definiert durch  $\phi(T_i) = t_i$ . Also ist  $\tilde{A}$  eine homogene  $A$ -Algebra<sup>5</sup>. Sei  $P(T)$  ein homogenes Polynom mit Koeffizienten in  $A$ . Es gilt  $P(t_1, \dots, t_n) = 0$  genau dann, wenn  $P(f_1, \dots, f_n) = 0$ .

**Definition 1.25** (siehe [Li] 8.1.1) Sei  $X = \text{Spec } A$  ein affines Noethersches Schema und sei  $I$  ein Ideal in  $A$ . Sei  $\tilde{X} = \text{Proj } \tilde{A}$ . Den kanonischen Morphismus  $\tilde{X} \rightarrow X$  nennt man Aufblasung von  $X$  mit Zentrum (oder entlang)  $V(I) = \text{Spec } A/I$ .

Erste Eigenschaften liefern die folgenden Lemmata.

**Lemma 1.26** (siehe [Li] 8.1.2) Sei  $A$  ein Noetherscher Ring und sei  $I$  ein Ideal von  $A$ .

- a) Falls  $I$  von einem regulären Element erzeugt wird, gilt  $\tilde{A} \simeq A[T]$ . Daraus folgt, dass  $\text{Proj } \tilde{A} \rightarrow \text{Spec } A$  ein Isomorphismus ist.
- b) Es gilt  $\text{Proj } \tilde{A} = \emptyset$  genau dann, wenn  $I$  nilpotent ist.
- c) Der Ring  $\tilde{A}$  ist ganz (bzw. reduziert) genau dann, wenn  $A$  ganz (bzw. reduziert) ist.

<sup>5</sup>Eine homogene  $A$ -Algebra ist der Quotient aus  $A[T_0, \dots, T_n]$  und einem homogenen Ideal.

d) Sei  $B$  eine flache  $A$ -Algebra und sei  $\tilde{B}$  die graduierte  $B$ -Algebra die zu dem Ideal  $IB$  gehört. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus  $\tilde{B} \simeq B \otimes_A \tilde{A}$ .

e) Sei  $S_i = T_i/T_1 \in \mathcal{O}(D_+(T_1))$ .<sup>6</sup> Dann ist  $(\text{Ker } \phi)_{(T_1)}$  gleich

$$J_1 := \{P(S) \in A[S_2, \dots, S_n] \mid \exists d \geq 0, f_1^d P \in (f_1 S_2 - f_2, \dots, f_1 S_n - f_n)\},$$

und wir können  $\tilde{A}_{(t_1)}$  identifizieren mit der  $A$ -Unteralgebra  $A_{f_1}$  erzeugt von den Elementen  $f_i/f_1$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

f) Sei  $J = (f_i T_j - f_j T_i)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Dann gilt  $J \subset \text{Ker } \phi$ . Seien die  $f_i$  ein minimales System von Erzeugern und das abgeschlossene Unterschema  $Z := V(J)$  von  $\mathbb{P}_A^{n-1}$  nullteilerfrei. Dann ist die abgeschlossene Immersion  $\alpha : \text{Proj } \tilde{A} \rightarrow Z$  ein Isomorphismus.

□

Das folgende Lemma gibt eine konstruktive Methode zum Aufblasen.

**Lemma 1.27** (siehe [Li] 8.1.4) Sei  $\tilde{X} \rightarrow X = \text{Spec } A$  die Aufblasung eines Noetherschen, integralen, affinen Schemas entlang eines abgeschlossenen Unterschemas  $V(I)$ . Sei  $I = (f_1, \dots, f_n)$  mit  $f_i \neq 0$  für jedes  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist  $\tilde{X}$  die Vereinigung der affinen offenen Unterschemata  $\text{Spec } A_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dabei ist  $A_i$  die  $A$ -Unteralgebra von  $\text{Quot } A$ , die durch die  $f_j f_i^{-1} \in \text{Quot } A$  für  $1 \leq j \leq n$  erzeugt wird.

□

Das folgende Lemma besagt, dass die Aufblasungsabbildung außerhalb des Zentrums ein Isomorphismus ist.

**Lemma 1.28** (vgl. [Li] 8.1.12) Sei  $X = \text{Spec } A$  ein affines, Noethersches Schema,  $I$  ein Ideal von  $A$  und  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die Aufblasung entlang  $V(I)$ . Dann induziert  $\pi$  einen Isomorphismus  $\pi^{-1}(X \setminus V(I)) \rightarrow X \setminus V(I)$ .

Dies können wir sogar noch etwas verallgemeinern. Bei Aufblasungen hat man auch häufig mehrere nichtreguläre Punkte auf einer Komponente.

**Satz 1.29** Sei  $X = \text{Spec } A$  ein affines Noethersches 2-dimensionales Schema und  $I$  ein Ideal von  $A$ , sodass  $A/I$  regulär ist und  $\dim A/I = 1$ . Sei  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  die Aufblasung entlang  $V(I)$ . Sei  $N(I)$  die Menge der nicht regulären Punkte von  $X$ , die in  $V(I)$  liegen, und  $N(I)$  sei abgeschlossen in  $X$ . Dann induziert  $\pi$  einen Isomorphismus  $\pi^{-1}(X \setminus N(I)) \rightarrow X \setminus N(I)$ .

**Beweis** Sei  $\mathfrak{m} \in V(I) \setminus N(I)$ . Sei  $\pi : \tilde{X} = \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} I^n \rightarrow \text{Spec } A$  die Aufblasung von  $X$  entlang  $V(I)$  und sei  $\text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} (A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} I)^n \rightarrow \text{Spec } A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  die Aufblasung von  $\text{Spec } A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  entlang  $V(A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} I)$ .

---

<sup>6</sup> $D_+(T_1) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } \tilde{A} \mid T_1 \notin \mathfrak{p}\}$

Die Abbildung

$$A \rightarrow A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$$

ist flach, also gilt nach [Li] Lemma 8.1.2 (d)

$$\left( \bigoplus_{n \geq 0} I^n \right) \otimes_A A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \simeq \bigoplus_{n \geq 0} (IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle})^n.$$

Zusammen ergibt sich das folgende kommutative Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc} \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} I^n & \longleftarrow & \text{Proj} \left( \left( \bigoplus_{n \geq 0} I^n \right) \otimes_A A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \right) \simeq \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} (IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle})^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \text{Spec } A & \longleftarrow & \text{Spec } A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \end{array}$$

Da  $A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  und  $A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}/IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  regulär sind und  $\dim A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}/IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle} = 1$  wird das Ideal  $IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  in  $A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}$  nach [Li] Corollary 4.2.15 und [Li] Example 6.3.2 von einem regulärem Element erzeugt.

Nach [Li] Lemma 8.1.2 gilt also

$$\text{Spec } A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \simeq \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} (IA_{\langle \mathfrak{m} \rangle})^n$$

Betrachten wir jetzt also die Faser über  $\mathfrak{m}$  der Aufblasung von  $X$  entlang  $V(I)$ .

Die Faser über  $\mathfrak{m}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} I^n \times_A \text{Spec } A/\mathfrak{m} \\ &= \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} I^n \otimes_A A/\mathfrak{m} \right) \\ &= \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} I^n \otimes_A A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \otimes_{A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}} A/\mathfrak{m} \right) \\ &= \text{Proj} \left( \bigoplus_{n \geq 0} I^n \otimes_A A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \right) \times_{A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}} \text{Spec } A/\mathfrak{m} \\ &= \text{Spec } A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \times_{A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}} \text{Spec } A/\mathfrak{m} \\ &= \text{Spec} (A_{\langle \mathfrak{m} \rangle} \otimes_{A_{\langle \mathfrak{m} \rangle}} A/\mathfrak{m}) \\ &= \text{Spec } A/\mathfrak{m}. \end{aligned}$$

Da  $A/\mathfrak{m}$  ein Körper ist, besteht die Faser über  $\mathfrak{m}$  nur aus einem Punkt.

Sei jetzt

$$\pi' : \tilde{X} \setminus \pi^{-1}(N(I)) \rightarrow X \setminus N(I), \quad x \mapsto \pi(x).$$

Nach den Voraussetzungen sind  $X \setminus N(I)$  und  $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(N(I))$  offene Unterschemata in  $X$  bzw.  $\tilde{X}$ . Weiter ist  $\pi'$  nach dem eben gezeigten und [Li] 8.1.12 (d) bijektiv. Also ist  $\pi$  ein Isomorphismus von Schemata.

□

Jetzt können wir, anstatt die nichtregulären Punkte einer Komponente einzeln, die ganze Komponente auf einmal aufzublasen. Satz 1.29 garantiert uns, dass sich an den regulären Punkten nichts verändert. Man muss aber beachten, dass es nicht egal ist, ob man eine Komponente auf einmal oder alle ihre nichtregulären Punkte nacheinander aufbläst. Allgemein sind das zwei Konstruktionen, die grundsätzlich verschieden sind.

Wir wollen in dieser Arbeit hauptsächlich Schemata aufblasen, die leider nichtaffin aber noch lokal Noethersch sind. Bei nichtaffinen Schemata muss man von dem Ideal  $I$  zu der von  $I$  erzeugten kohärenten<sup>7</sup> Idealgarbe  $\mathcal{I}$  übergehen (vgl. [Li] Definition 8.1.11). Dies ist zwar eine schöne Definition, aber leider nicht anschaulich. Die folgende Bemerkung ist eine explizite Methode, die Aufblasung eines lokal Noetherschen Schemas zu konstruieren. Dieses Ergebnis reicht uns für diese Arbeit aus.

**Bemerkung 1.30** Sei  $X$  ein lokal Noethersches Schema und  $\mathcal{I}$  eine kohärente Idealgarbe. Sei  $\{X_i\}$  eine affine Überdeckung von  $X$  mit  $X_i = \text{Spec } A_i$  und  $\mathcal{I}(X_1) = I$  ein Ideal von  $A_1$ . Sei  $N(\mathcal{I})$  die Menge aller nichtregulären Punkte von  $X$ , die auf  $V(\mathcal{I})$  liegen. Falls  $N(\mathcal{I}) \subset X_1$ , dann wird die Aufblasung  $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$  von  $X$  entlang  $V(\mathcal{I})$  durch die Aufblasung  $\phi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  von  $X_1$  entlang  $V(I)$  induziert.

**Beispiel 1.31** Sei  $R$  in diesem Beispiel ein diskreter Bewertungsring mit lokalem Parameter  $\pi$  und Restklassenkörper  $k$ . Sei  $X \subset \mathbb{P}_R^2$  ein Schema definiert durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0 \text{ für ein homogenes Polynom } f(x, y, z) \in R[x, y, z].$$

Mit anderen Worten,  $X = \text{Proj } R[x, y, z]/(f)$ . Um sicher zu stellen, dass  $X$  ein zweidimensionales Schema ist, dessen spezielle Faser Dimension 1 hat, werden wir annehmen, dass  $f$  ein nichtkonstantes Polynom und dass mindestens ein Koeffizient von  $f$  eine Einheit ist.

Man beachte, dass  $X$  eine „Fläche“, d.h. ein zweidimensionales Schema ist, das in dem dreidimensionalen Schema  $\mathbb{P}_R^2$  lebt.

Intuitiv sind die Koordinatenfunktionen in  $\mathbb{P}_R^2$  gerade  $\pi, x, y$  und  $z$ . Um die spezielle Faser zu berechnen, setzen wir  $\pi = 0$ .

Jetzt nehmen wir an, dass der Punkt  $P = V((\pi, x, y, z - 1))$  auf der speziellen Faser nichtregulär ist. Mit anderen Worten nehmen wir an, dass

$$f(0, 0, 1) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 1) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 1) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

---

<sup>7</sup>siehe [Ha] II.5

Jetzt können wir nach Bemerkung 1.30 die affine Karte

$$X_0 = \text{Spec } R[x, y]/f(x, y)$$

mit  $f(x, y) = f(x, y, 1)$  betrachten.

Sei  $I$  das Ideal  $(x, y, \pi)$  und  $P = V(I) = V((\pi, x, y)) \in X_0$  ein nichtregulärer Punkt auf der speziellen Faser von  $X_0$ .

Nach Lemma 1.27 konstruiert man die Aufblasung von  $X$  entlang  $V(I)$ , indem man die folgenden drei affinen Karten auf die unten beschriebenen Art und Weise zusammenklebt.

**Karte 1:** Man definiert die neuen Variablen

$$x = \pi x_1 \text{ und } y = \pi y_1,$$

und sei  $\nu$  die größte ganze Zahl für die gilt

$$f(\pi x_1, \pi y_1) = \pi^\nu f_1(x_1, y_1), \text{ mit } f_1(x_1, y_1) \in R[x_1, y_1].$$

Mit anderen Worten, man faktorisiert eine Potenz von  $\pi$  heraus, sodass die Koeffizienten von  $f_1$  in  $R$  sind und mindestens ein Koeffizient eine Einheit ist. Dann ist die erste Koordinatenkarte für die Aufblasung von  $X$  in  $V(I)$  das Schema  $X_1 \subset \mathbb{A}_R^2 = \text{Spec } R[x_1, y_1]$  definiert durch

$$X_1 := \text{Spec } R[x_1, y_1]/(f_1(x_1, y_1)).$$

An der ersten Karte verdeutlichen wir noch einmal den Zusammenhang mit Lemma 1.27. Nach der Notation von Lemma 1.27 ist  $A = R[x, y]/(f(x, y, 1))$ ,  $f_1 = \pi$ ,  $f_2 = x$  und  $f_3 = y$ .

Die erste Karte ist die  $A$ -Unteralgebra von  $\text{Quot}(A)$  erzeugt von  $\pi x^{-1}$ ,  $\pi y^{-1}$ . Dies sind genau die neuen Variablen  $x_1 = \pi x^{-1}$  und  $x_2 = \pi y^{-1}$ .

**Karte 2:** Die zweite Karte konstruiert man mittels der neuen Variablen  $\pi'$ ,  $x'$  und  $y'$ . Sie sind definiert durch

$$\pi = \pi' y', \quad x = x' y', \text{ und } y = y'.$$

Diese setzen wir in das Polynom  $f(x, y)$  ein. Danach nehmen wir jeden Koeffizienten  $a$  von  $f(x, y)$  und ersetzen die größte Potenz von  $\pi$  durch die Potenz von  $\pi' y'$ . Zum Beispiel, falls  $\pi^2 | a$  und  $\pi^3 \nmid a$ , dann würden wir  $a$  durch  $(\pi' y')^2 \pi^{-2} a$  ersetzen. Wir faktorisieren die größtmögliche Potenz von  $y'$  aus und bekommen

$$f(x' y', y') = (y')^\nu f'(x', y') \quad \text{mit } f'(x', y') \in R[\pi', x', y'],$$

und die zweite Koordinatenkarte der Aufblasung ist das Schema

$$X' := \text{Spec } R[\pi', x', y']/(\pi - \pi' y', f'(x', y')).$$

Man beachte, dass  $\pi'$  eine neue Variable ist, so wie die Variablen  $x'$  und  $y'$ . Das Schema  $X'$  ist das abgeschlossene Unterschema von  $\mathbb{A}_R^3 = \text{Spec } R[\pi', x', y']$  definiert durch die zwei Gleichungen  $\pi = \pi' y'$  und  $f'(x', y') = 0$ .

**Karte 3:** Die dritte Karte konstruiert man ähnlich wie die zweite Karte, indem man die Variablen  $\pi'', x'', y''$  benutzt, definiert durch

$$\pi = \pi''x'', \quad x = x'' \text{ und } y = y''x''.$$

Setzen wir sie in  $f(x, y)$  ein, wie in der zweiten Karte erklärt, und ziehen wir die größte Potenz von  $x''$  heraus, so bekommen wir

$$f(x'', y''x'') = (x'')^{\nu''} f''(x'', y'') \text{ mit } f''(x'', y'') \in R[x'', y''].$$

Die dritte Koordinatenkarte der Aufblasung ist das Schema

$$X'' := \text{Spec } R[\pi'', x'', y''] / (\pi - \pi''x'', f''(x'', y'')).$$

**Verkleben der Karten:** Die drei Karten muss man dann verkleben. Zum Beispiel um eine Abbildung von  $X_1$  nach  $X'$  zu erhalten, müssen wir nur  $(\pi', x', y')$  als Term in  $(\pi, x_1, y_1)$  darstellen. Also ergibt sich

$$\pi' = \frac{\pi}{y'} = \frac{\pi}{y} = \frac{1}{y_1}, \quad x' = \frac{x}{y'} = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \text{ und } y' = y = \pi y_1.$$

Diese Gleichungen definieren eine birationale Abbildung  $X_1 \rightarrow X'$ , welche überall definiert ist außer in den Punkten von  $C_1$  mit  $y_1 = 0$ . Genauso erhalten wir eine birationale Abbildung  $X_1 \rightarrow X''$  indem wir die folgenden Gleichungen benutzen:

$$\pi'' = \frac{\pi}{x''} = \frac{\pi}{x} = \frac{1}{x_1}, \quad x'' = x = \pi x_1 \text{ und } y'' = \frac{y}{x''} = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Ebenso erhält man eine birationale Abbildung  $X' \rightarrow X''$  gegeben durch

$$\pi'' = \frac{\pi}{x''} = \frac{\pi}{x} = \frac{\pi'}{x'}, \quad x'' = x = x'y' \text{ und } y'' = \frac{y}{x''} = \frac{y}{x} = \frac{1}{x'}.$$

Diese Abbildungen benutzt man um die drei Karten zusammenzukleben. Das somit erhaltene Schema  $\tilde{X}$  ist die Aufblasung von  $X$  in  $V(I)$ . Man beachte, dass die Aufblasung formal über die graduierte  $A$ -Algebra  $\tilde{A}$  definiert ist, da es eine schöne Definition ermöglicht. In unserer Konstruktion kommt  $\tilde{A}$  aber nicht mehr vor, da das Verkleben von affinen Schemata viel anschaulicher ist. Mit Hilfe von Lemma 1.27 kann man zeigen, dass beide Ansätze kompatibel sind. Für  $\tilde{X}$  gilt also  $\tilde{X} = \text{Proj } \tilde{A}$ .

Um die spezielle Faser der Aufblasung zu erhalten, nehmen wir die spezielle Faser jeder Karte und kleben sie zusammen. Die spezielle Faser der Koordinatenkarte berechnet man, indem man  $\pi = 0$  setzt und sich die resultierende über  $k$  definierte Kurve anschaut. Die erste Karte ist

$$\tilde{X}_1 = \text{Spec } k[x_1, y_1] / (f_1(x_1, y_1)).$$

In anderen Worten ist  $\tilde{X}_1$  die Kurve definiert durch die Gleichung  $f_1 = 0$ .

Ähnlich berechnet man die speziellen Fasern von  $X'$  indem man  $\pi = 0$  setzt, was bedeutet, dass

$$\tilde{X}' = \text{Spec } k[\pi', x', y'] / (\pi' y', \tilde{f}'(x', y')).$$

Hier behandelt man wieder  $\pi'$  als eine Variable, also besteht  $\tilde{X}'$  aus zwei Komponenten. Die erste Komponente bekommt man, indem man  $\pi' = 0$  setzt und die zweite, indem man  $y' = 0$  setzt. Selbstverständlich kann jede Komponente aus mehreren irreduziblen Komponenten bestehen oder auch leer sein.

Zum Schluss ist noch  $\tilde{X}''$  gegeben durch

$$\tilde{X}'' = \text{Spec } k[\pi'', x'', y''] / (\pi'' x'', \tilde{f}''(x'', y'')),$$

also besteht  $\tilde{X}''$  aus zwei Komponenten, eine mit  $\pi'' = 0$  und die andere mit  $x'' = 0$ .

In einer Zeichnung könnte die Aufblasung aussehen wie in Abbildung 1 angedeutet wird.

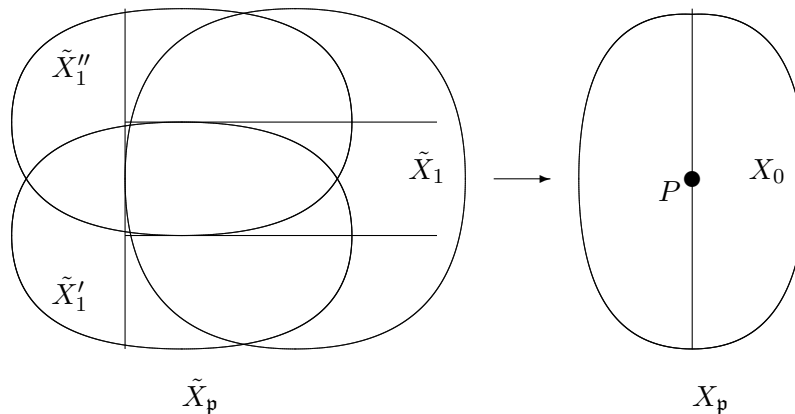


Abbildung 1: Eine Beispielaufblasung

**Beispiel 1.32** Sei  $K = \mathbb{Q}$  und  $E/\mathbb{Q}$  die Kurve aus Beispiel 1.18 definiert durch die Gleichung

$$E : y^2 = x^3 + x^2 - 32x + 60,$$

und  $W/\mathbb{Z}$  das Schema

$$W = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, y] / (y^2 - x^3 - x^2 + 32x - 60).$$

Der Punkt  $P_2 = V((x, y, 2))$  ist nach Beispiel 1.18 nichtregulär, daher werden wir den Punkt  $P_2$  in diesem Beispiel aufblasen.

Um die Aufblasung einfacher zu machen, verschieben wir die Koordinaten so, dass alle Zentren durch den „Nullpunkt“ der affinen Karte gehen. Mittels

$$x \mapsto x \text{ und } y \mapsto y + x + 2$$

erhalten wir die Kurve  $E_0/\mathbb{Q}$

$$E_0 : y^2 + 2xy + 4y = x^3 - 28x + 56$$

und das Schema  $W_0/\mathbb{Z}$

$$W_0 = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 + 2xy + 4y - x^3 + 28x - 56).$$

Der Punkt  $P_2 = V((x, y, 2))$  auf  $W$  ist auf  $W_0$  der Punkt  $P_2 = V((x, x + y + 2, 2)) = V((x, y, 2))$ . Wir blasen deshalb in dem Punkt  $V((x, y, 2))$  auf. Aufblasen funktioniert nun, wie wir im Beispiel 1.31 gesehen haben.

Man muss drei Karten beachten.

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$x = 2x_1 \text{ und } y = 2y_1,$$

und erhalten

$$4y_1^2 + 8x_1y_1 + 8y_1 = 8x_1^3 - 56x_1 + 56.$$

Jetzt kürzen wir 4 und kommen zu unser Karte  $W_1$

$$W_1 : y_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1 = 2x_1^3 - 14x_1 + 14.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man  $2 = 0$  setzen und erhält

$$y_1^2 = 0.$$

Es gibt also die Komponente

$$\mathcal{C}_3 = \{y_1 = 0\},$$

die mit der Vielfachheit 2 auftritt.

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $x$ , also

$$2 = x'\pi', \quad x = x' \text{ und } y = x'y',$$

und erhalten

$$x'^2y'^2 + \pi'x'^3y' + \pi'^2x'^3y' = x'^3 - 7\pi'^2x'^3 + 7\pi'^3x'^3.$$

Jetzt kürzen wir  $x'^2$  und kommen zu unser Karte  $W'_1$

$$W'_1 : y'^2 + \pi'x'y' + \pi'^2x'y' = x' - 7\pi'^2x' + 7\pi'^3x'.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $x' = 0$  und erhält

$$y'^2 = x', \quad \pi' = 0 \text{ und } y'^2 = 0, \quad x' = 0.$$

Es gibt also die Komponenten

$$\mathcal{C}'_1 = \{y'^2 = x', \pi' = 0\}, \text{ und } \mathcal{C}'_3 = \{y' = 0, x' = 0\},$$

wobei hier die Komponente  $\mathcal{C}'_3$  mit der Vielfachheit 2 auftritt.



**Karte 3:** In der dritten Karte dividieren wir durch  $y$ , also

$$2 = y''\pi'', \quad x = x''y'' \quad \text{und} \quad y = y'',$$

und erhalten

$$y''^2 + \pi''x''y''^3 + \pi''^2y''^3 = x''^3y''^3 - 7\pi''^2x''y''^3 + 7\pi''^3y''^3.$$

Jetzt kürzen wir  $y''^2$  und kommen zu unser Karte  $W_1''$

$$W_0'' : 1 + \pi''x''y'' + \pi''^2y'' = x''^3y'' - 7\pi''^2x''y'' + 7\pi''^3y''.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi'' = 0$  oder  $y'' = 0$ , und erhält

$$1 = y''x''^3, \quad \pi'' = 0 \quad \text{und} \quad 1 = 0, \quad y'' = 0.$$

Das zweite geht natürlich nicht, und so gibt es nur die Komponente

$$\mathcal{C}_1'' = \{1 = y''x''^3, \pi'' = 0\}.$$

Wie in Beispiel 1.31 gibt es zwischen diesen Karten Verklebeabbildungen, die die Komponenten ineinander umwandeln. Wir betrachten die Abbildungen  $\phi_{21}$  von Karte 2 nach Karte 1 und  $\phi_{23}$  von Karte 2 nach Karte 3.

$\phi_{21} : \mathbf{Karte\ 2} \rightarrow \mathbf{Karte\ 1}$ :  $\phi_{21}$  ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \phi_{21}(x') &= x = 2x_1, \\ \phi_{21}(y') &= \frac{y}{y} = \frac{2y_1}{2x_1} = \frac{y_1}{x_1}, \\ \phi_{21}(\pi') &= \frac{\pi}{x} = \frac{2}{2x_1} = \frac{1}{x_1}. \end{aligned}$$

Durch  $\phi_{21}$  wird eine Abbildung  $\Phi_{21}$  aus der Menge der Komponenten von Karte 2 in die Potenzmenge der Menge der Komponenten von Karte 1 induziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(\mathcal{C}'_1) &= \Phi_{21}(\{y'^2 = x', \pi' = 0\}) = \left\{ \frac{y_1^2}{x_1^2} = 2x, \frac{1}{x_1} = 0 \right\} \\ &= \{y_1^2 = \pi x_1^3, 1 = 0\} = \emptyset \quad \text{und} \\ \Phi_{21}(\mathcal{C}'_3) &= \Phi_{21}(\{y' = 0, x' = 0\}) = \left\{ \frac{y_1}{x_1} = 0, 2x_1 = 0 \right\} \\ &= \{y_1 = 0\} = \{\mathcal{C}_3\}. \end{aligned}$$

Beim Verkleben der Karten 1 und 2 verklebt man also die Komponente  $\mathcal{C}'_3$  der zweiten Karte mit der Komponente  $\mathcal{C}_3$  der ersten Karte. Dagegen ist die Komponente  $\mathcal{C}'_1$  der zweiten Karte nicht in der ersten Karte enthalten.

$\phi_{23} : \text{Karte 2} \rightarrow \text{Karte 3}$ :  $\phi_{23}$  ist bestimmt durch

$$\begin{aligned}\phi_{31}(x') &= x = x''y'', \\ \phi_{23}(y') &= \frac{y}{x} = \frac{y''}{x''y''} = \frac{1}{x''}, \\ \phi_{23}(\pi') &= \frac{2}{x} = \frac{\pi''y''}{x''y''} = \frac{\pi''}{y''}.\end{aligned}$$

Durch  $\phi_{31}$  wird wieder eine Abbildung  $\Phi_{31}$  aus der Menge der Komponenten von Karte 2 in die Potenzmenge der Menge der Komponenten von Karte 3 induziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi_{23}(C'_1) &= \Phi_{23}(\{y'^2 = x', \pi' = 0\}) = \{\frac{1}{x''^2} = x''y'', \frac{\pi''}{y''} = 0\} \\ &= \{1 = x''^3y'', \pi'' = 0\} = \{C''_1\} \text{ und} \\ \Phi_{21}(C'_3) &= \Phi_{21}(\{y' = 0, x' = 0\}) = \{\frac{1}{x''} = 0, x''y'' = 0\} \\ &= \{1 = 0, x''y'' = 0\} = \emptyset.\end{aligned}$$

Beim Verkleben der Karten 2 und 3 verklebt man also die Komponente  $C'_1$  der zweiten Karte mit der Komponente  $C''_1$  der dritten Karte. Dagegen ist die Komponente  $C'_3$  der zweiten Karte nicht in der dritten Karte enthalten.

Man sieht also, dass Karte 2 alle vorkommenden Komponenten enthält.

Zur Vereinfachung nennen wir die Komponenten der Aufblasung  $C_1$  und  $C_3$ , wobei der Teil von  $C_1$  in der dritten Karte gerade  $C''_1$  ist und der Teil von  $C_1$  in der zweiten Karte gerade  $C'_1$ . Analog für die Komponente  $C_3$ .

Sucht man jetzt nach nichtregulären Punkten, so sieht man, dass als einziger Punkt auf der Komponente  $C_1$  der Schnittpunkt mit  $C_3$  nichtregulär sein kann, da die Aufblasungsabbildung außerhalb des Zentrums ein Isomorphismus ist.

Wir müssen uns also nur die Punkte der Komponente  $C_3$  anschauen. Dafür müssen wir wieder in die Karten gehen. In der ersten Karte betrachten man die lokalen Ringe für den Punkt  $P_a = V((p_a(x_1), y_1, 2))$ , wobei  $p_a(x_1)$  ein modulo 2 irreduzibles Polynom ist.

$$\begin{aligned}O_{W_0, P_a} &= (\mathbb{Z}[x_1, y_1]/(y_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1 - 2x_1^3 + 14x_1 - 14))_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x_1, y_1]_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle} / (y_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1 - 2(x_1^3 - 7x_1 + 7)).\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}[x_1, y_1]_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle}$  ist ein lokaler, regulärer, Noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = (y_1, 2, p_a(x_1))$  und  $f = (y_1^2 + 2x_1y_1 + 2y_1 - 2(x_1^3 - 7x_1 + 7)) \in \mathfrak{m}$ . Nach Satz 1.16 ist  $O_{W_0, P_a}$  genau dann regulär, wenn  $f \notin \mathfrak{m}^2$ . Wie man sieht, ist das genau der Fall wenn  $p_a(x_1) \neq x_1^3 - x_1 + 1$ .

Also ist der einzige nichtreguläre Punkt in Karte 1 der Punkt

$$Q = V((x_1^3 - x_1 + 1, y_1, 2)).$$

In der zweiten Karte betrachten wir die Punkte  $P_a = V((x', y', p_a(\pi')))$ , wobei  $p_a(\pi')$  ein modulo 2 irreduzibles Polynom ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & O_{W'_0, P_a} \\ &= (\mathbb{Z}[x', y', \pi'] / (2 - \pi' y', y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' - x' + 7\pi'^2 x' - 7\pi'^3 x'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle} \\ &= (\mathbb{Z}[x', y', \pi'] / (2 - \pi' y'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle} / (y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' - x'(1 - 7\pi'^2 + 7\pi'^3)). \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}[x', y', \pi'] / (2 - \pi' y'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle}$  ist ein lokaler, regulärer, Noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = (x', y', p_a(\pi'))$  und  $f = (y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' - x'(1 - 7\pi'^2 + 7\pi'^3)) \in \mathfrak{m}$ . Nach Satz 1.16 ist  $O_{W'_0, P_a}$  genau dann regulär, wenn  $f \notin \mathfrak{m}^2$ . Wie man sieht, ist das genau der Fall wenn  $p_a(\pi') \neq \pi'^3 - \pi'^2 + 1$ .

Also ist der einzige nichtreguläre Punkt in Karte 2 der Punkt

$$Q' = V((x', y', \pi'^3 - \pi'^2 + 1)).$$

Mit Hilfe von  $\Phi_{21}$  sehen wir

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(Q') &= \Phi_{21}(V((x', y', \pi'^3 - \pi'^2 + 1))) \\ &= V((2x_1, \frac{y_1}{x_1}, \frac{1}{x_1}^3 - \frac{1}{x_1}^2 + 1)) = V((x_1^3 + x_1 + 1, y_1, 2)) = Q. \end{aligned}$$

Der Punkt  $Q$  zerfällt über dem algebraischen Abschluss in drei Punkte  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$ .

Die erste Aufblasung der Faser über 2 sieht man in Abbildung 2.

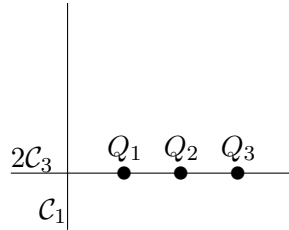


Abbildung 2: Die Faser über (2) der Kurve  $E$  aus Beispiel 1.32 nach dem ersten Aufblasen.

Die Aufblasung enthält wie wir gesehen haben noch drei nichtreguläre Punkte. Satz 1.29 erlaubt uns nun, dass wir anstatt diese drei Punkte einzeln, die ganze Faser in Karte 1 aufzublasen.

**Beispiel 1.33** In diesem Beispiel blasen wir also die Karte  $W_1$

$$W_1 : y_1^2 + 2x_1 y_1 + 2y_1 = 2x_1^3 - 14x_1 + 14$$

entlang des Unterschemas  $\mathcal{C}_3 = V((y_1, 2))$  auf.

Diesmal benötigen wir nur zwei Karten.

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$y_1 = 2y_2$$

und erhalten

$$4y_2^2 + 4x_1y_2 + 4y_2 = 2x_1^3 - 14x_1 + 14.$$

Jetzt kürzen wir 2 und kommen zu unser Karte  $W_2$

$$W_2 : 2y_2^2 + 2x_1y_2 + 2y_2 = x_1^3 - 7x_1 + 7.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$x_1^3 + x_1 + 1 = 0.$$

Es gibt also die Komponenten

$$\mathcal{C}_2 = \{x_1 = \sigma_1\}, \mathcal{C}_4 = \{x_1 = \sigma_2\} \text{ und } \mathcal{C}_5 = \{x_1 = \sigma_3\},$$

wobei  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  die drei verschiedenen Nullstellen des Polynoms  $x_1^3 + x_1 + 1$  in  $\overline{\mathbb{Q}}$  sind.

**Karte 2:** In der dritten Karte dividieren wir durch  $y$ , also

$$2 = y'\pi', \quad x_1 = x' \text{ und } y_1 = y'$$

und erhalten

$$y'^2 + \pi'x'y'^2 + \pi'y'^2 = \pi'x'^3y' - 7\pi'x'y' + 7\pi'y'.$$

Jetzt kürzen wir  $y'$  und kommen zu unser Karte  $W'_2$

$$W'_2y' + \pi'x'y' + \pi'y' = \pi'x'^3 - 7\pi'x' + 7\pi'.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $y' = 0$ , und erhält

$$y' = 0, \quad \pi' = 0 \text{ und}$$

$$0 = \pi'(x'^3 + x' + 1), \quad y' = 0.$$

Es gibt also die Komponenten

$$\mathcal{C}'_2 = \{x' = \sigma_1, y' = 0\}, \mathcal{C}'_4 = \{x' = \sigma_2, y' = 0\},$$

$$\mathcal{C}'_5 = \{x' = \sigma_3, y' = 0\} \text{ und } \mathcal{C}'_3 = \{y' = 0, \pi' = 0\},$$

wobei hier die Komponente  $\mathcal{C}'_3$  mit der Vielfachheit 2 auftritt und wieder  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  die drei verschiedenen Nullstellen des Polynoms  $x_1^3 + x_1 + 1$  in  $\overline{\mathbb{Q}}$  sind.

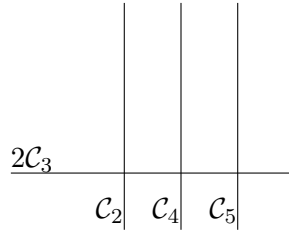


Abbildung 3: Die Aufblasung der Karte 1 aus Beispiel 1.32

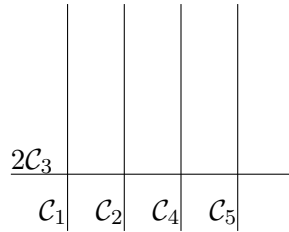


Abbildung 4: Die Faser über (2) der Kurve  $E$  aus Beispiel 1.32 nach der Aufblasung

Jetzt kann man wieder zeigen, dass beim Verkleben sowohl  $C_2$  und  $C'_2$ ,  $C_4$  und  $C'_4$ , als auch  $C_5$  und  $C'_5$  zusammengeklebt werden.

Weiter findet man wie in Beispiel 1.32 heraus, dass alle Punkte auf Karte 1 und Karte 2 regulär sind.

Die Aufblasung der Karte  $W_1$  sieht man in Abbildung 3.

Jetzt haben wir sogar eine reguläre Faser über (2) und als fertige Aufblasung ergibt sich Abbildung 4.

Eine wichtige Eigenschaft der Aufblasungsabbildung war ja, dass sie außerhalb des Zentrums ein Isomorphismus ist. Man kann also anders herum auch Kurven abblasen, also die Aufblasung umkehren. Um eine Kurve abblasen zu können, muss sie bestimmte Eigenschaften besitzen, für die wir aber die Schnittpaarung benötigen (siehe Definition 2.25).

**Definition 1.34** *Seien  $X_1/R$  und  $X_2/R$  zwei Schemata und  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$  ein birationaler Morphismus. Die Abbildung  $\phi$  nennt man Abblasung einer Kurve zu einem Punkt, falls er außerhalb einer Kurve  $\Gamma$  ein Isomorphismus auf  $X_2$  bis auf einen Punkt  $x_0$  ist und die Kurve  $\Gamma$  auf den Punkt  $x_0$  abbildet.*

Wie man sieht, ist  $\phi$  genau dann eine Abblasung, wenn  $\phi^{-1}$  eine Aufblasung ist. Wir benötigen Abblasung nur im Zusammenhang des Beweises der Existenz minimaler Modelle. Wir werden aber nie konkret mit ihnen rechnen.

### 1.3 Lokale Definition der Schnittzahl

Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche. Zur Definition der lokalen Schnittzahl benötigen wir zuerst den Begriff der lokalen Gleichung.

**Definition 1.35** Sei  $D \in \text{Div } \mathcal{C}$  ein Primdivisor und sei  $x \in D$  ein Punkt auf einer speziellen Faser  $\mathcal{C}_\nu$  von  $\mathcal{C}$ . Eine lokale Gleichung für  $D$  in  $x$  ist eine Funktion  $f \in \mathcal{O}_x$  mit  $\text{ord}_D(f) = 1$  und  $\text{ord}_E(f) = 0$  für alle Primdivisoren  $E \neq D$  mit  $x \in E$ .

**Bemerkung 1.36** Für jeden Divisor  $D$  und jeden Punkt  $x \in D$  existieren lokale Gleichungen.

**Beweis** Sei  $D$  ein Primdivisor und  $x \in D$ . Dann induziert  $D$  einen Divisor  $D_x$  auf das lokale Schema  $\text{Spec } \mathcal{O}_x$ . Da  $\mathcal{O}_x$  faktoriell ist ([Ha] II Remark 6.11.1A.), ist  $D_x$  ein Hauptdivisor. Sei  $D_x = (f_x)$  mit  $f_x \in K$ . Da  $\mathcal{O}_D = (\mathcal{O}_x)_{\langle f_x \rangle}$  gilt  $\text{ord}_D(f_x) = 1$ .

Sei  $E$  ein anderer Primdivisor und  $g_x \in K$ , sodass  $E_x = (g_x)$ . Da  $D \neq E$  folgt  $D_x \neq E_x$  und  $f_x \neq g_x$ . Also ist  $f_x \in \mathcal{O}_E^* = ((\mathcal{O}_x)_{\langle g_x \rangle})^*$ . Damit folgt  $\text{ord}_E(f_x) = 0$ .

□

**Definition 1.37** (siehe [Si2] IV § 7) Seien  $D_1, D_2 \in \text{Div}(\mathcal{C})$  verschiedene Primdivisoren und sei  $x \in \mathcal{C}$  ein abgeschlossener Punkt auf der speziellen Faser  $\mathcal{C}_\nu$  von  $\mathcal{C}$ . Man wähle lokale Gleichungen  $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_x$  jeweils für  $D_1, D_2$ . Die (lokale) Schnittzahl von  $D_1$  und  $D_2$  in  $x$  ist die Länge von  $\mathcal{O}_x/(f_1, f_2)$  als  $\mathcal{O}_x$  Modul, also

$$i_x(D_1, D_2) = \ell_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_x/(f_1, f_2).$$

**Beispiel 1.38** Sei  $\mathcal{C}$  das Schema der Kurve aus Beispiel 1.32 mit der aufgeblasenen Faser über (2). Die Kurve  $\mathcal{C}$  ist also außerhalb der Faser über (2) gegeben durch die Gleichung

$$y^2 = x^3 + x^2 - 32x + 60$$

und in der Faser über (2) lokal durch die Karten aus dem Beispiel.

Die Kurve  $\mathcal{C}$  hat, wie wir bemerkt haben und im nächsten Kapitel sehen werden, nur reguläre Punkte und ist daher eine arithmetische Fläche. Die Faser über (2) von  $\mathcal{C}$  besteht aus fünf Komponenten

$$\mathcal{C}_{(2)} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + 2\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5.$$

Wir wollen in diesem Beispiel die Schnittzahl  $(\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_3)_P$  ausrechnen. Die Komponenten  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_3$  schneiden sich in der zweiten Karte der ersten Aufblasung, also in der Karte

$$W'_1 = \mathbb{Z}[x', y', \pi']/(y'^2 + \pi'x'y' + \pi'^2x'y' - x' + 7\pi'^2x' - 7\pi'^3x')$$

in dem Punkt  $P = V((x', y', \pi'))$ .

Dafür müssen wir als erstes lokale Gleichungen für  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_3$  finden. Die Komponenten sind gegeben durch

$$\mathcal{C}_1 = \{y'^2 = x', \pi' = 0\}, \text{ und } \mathcal{C}_3 = \{y' = 0, x' = 0\}.$$

Aus der Gleichung

$$y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' = x' - 7\pi'^2 x' + 7\pi'^3 x'$$

ergibt sich

$$y'^2 - x' = \pi'(-x' y' - \pi' x' y' - 7\pi' x' + 7\pi'^2 x')$$

und

$$y'^2 = x'(-\pi' y' - \pi'^2 y' + 1 - 7\pi'^2 + 7\pi'^3)$$

also ist

$$\begin{aligned} \text{ord}_1(y'^2 - x') = 1, \text{ ord}_1(\pi') = 1, \text{ ord}_1(y') = 0 \text{ ord}_1(x') = 0 \\ \text{ord}_3(y'^2 - x') = 1, \text{ ord}_3(\pi') = 0, \text{ ord}_3(y') = 1 \text{ und } \text{ord}_3(x') = 2. \end{aligned}$$

Also kann man  $f_1 = \pi'$  und  $f_3 = y'$  als lokale Gleichungen für  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_3$  benutzen.

Berechnen wir jetzt die lokalen Schnittzahlen.

Für den Modul ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/(f_1, f_3) \\ &= (\mathbb{Z}[x', y', \pi']/(y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' - x' + 7\pi'^2 x' - 7\pi'^3 x', 2 - \pi' x')_{\langle \pi', x', y' \rangle})/(\pi', y') \end{aligned}$$

jetzt dürfen wir nach Satz 1.17 Lokalisierung und Quotientenbildung vertauschen

$$= (\mathbb{Z}[x', y', \pi']/(y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^2 x' y' - x' + 7\pi'^2 x' - 7\pi'^3 x', 2 - \pi' x', \pi', y')_{\langle \pi', x', y' \rangle})$$

jetzt können wir die Einsetzungshomomorphismen  $\pi' \mapsto 0, y' \mapsto 0$  und  $x' \mapsto 0$  benutzen

$$= (\mathbb{Z}/(2)_{\langle 2 \rangle}) = \mathbb{Z}/(2)$$

Und so ergibt sich für die Schnittzahl

$$(\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_3)_P = \ell_{\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}} \mathcal{O}_{\mathcal{C},P}/(f_1, f_3) = \ell_{\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}} \mathbb{Z}/(2) = 1,$$

da man sieht, dass die Kette von  $\mathcal{O}_{\mathcal{C},P}$ -Moduln

$$0 \subset \mathbb{Z}/(2)$$

maximal ist und die Länge 1 hat.

## 1.4 Globale Definition der Schnittzahl

Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche. Als globale Definition einer Schnittzahl auf einer arithmetischen Fläche erwarten wir eine Bilinearform, genannt Schnittpaarung, die folgende Eigenschaften erfüllt.

**1) Bilinearität:** Die lokale Definition soll bilinear fortgesetzt werden. Das heißt sind  $D_1$  und  $D_2$  zwei verschiedene irreduzible Divisoren, so ist

$$i(D_1, D_2) = \sum_{\nu \in M_K^0} \sum_{x \in D_1 \cap D_2 \cap \mathcal{C}_\nu} i_x(D_1, D_2)[k(x) : k_\nu],$$

wobei  $[k(x) : k_\nu]$  der Körpergrad des Restklassenkörpers des Punktes  $x$  über dem Restklassenkörper der Faser ist.

Man benötigt den Körpergrad um richtig zu zählen, da manche Punkte in mehrere verschiedene Punkte zerfallen und bei anderen nur der Körpergrad  $[k(x) : k_\nu]$  größer wird.

**2) Invarianz unter linearer Äquivalenz:** Die Schnittpaarung soll unter linearer Äquivalenz invariant sein. Das heißt sind  $D_1, D_2$  und  $D$  Divisoren und  $D_1 \simeq D_2$ , so gilt

$$i(D_1 \cdot D) = i(D_2 \cdot D).$$

**3) Symmetrie:** Die Schnittpaarung soll symmetrisch sein.

Betrachten wir einmal das folgende Beispiel:

**Beispiel 1.39** (siehe [Si2] IV Example 7.1) Sei in diesem Beispiel  $R$  ein diskreter Bewertungsring,  $\mathcal{C} = \mathbb{P}_R^1 = \text{Proj } R[X, Y]$ , und man betrachte die beiden Divisoren

$$D_1 = \{X = 0\} \text{ und } D_2 = \{X + \pi^n Y = 0\}.$$

Hier ist  $\pi \in R$  ein lokaler Parameter für das maximale Ideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$ , und  $n \geq 1$  eine ganze Zahl. Die beiden Divisoren schneiden sich nur in dem Punkt

$$x = \{X = \pi = 0\} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{P}_k^1$$

auf der speziellen Faser. Um die lokale Schnittzahl auszurechnen, dehomogenisieren wir indem wir  $Y = 1$  setzen und berechnen

$$\begin{aligned} i_x(D_1, D_2) &= \ell_{\mathcal{O}_x} R[X]_{(X)} / (X, X + \pi^n) \\ &= \ell_{\mathcal{O}_x} R[X] / (X, X + \pi^n)_{(X)} \\ &= \ell_{\mathcal{O}_x} R / (\pi^n) = n. \end{aligned}$$

Der Divisor  $D_2$  ist linear äquivalent zu dem Divisor  $D_3$  definiert durch

$$D_3 = D_2 + \text{div}\left(\frac{Y}{X + \pi^n Y}\right) = \{Y = 0\}.$$

Es fällt auf, dass  $D_1$  und  $D_3$  keinen Schnittpunkt haben. Die lineare Äquivalenz hat also bewirkt, dass der Schnittpunkt von  $D_1$  und  $D_2$  verschwunden ist. Der Schnittpunkt wurde also von der arithmetischen Fläche heruntergeschoben.



Dieses Beispiel zeigt uns, dass es nicht ohne weiteres möglich ist, eine Schnittpaarung zu definieren, die unsere geforderten Eigenschaften erfüllt. Das Problem besteht in der Tatsache, dass obwohl die Fasern vollständig sind, das Schema es selber nicht ist. So kann man durch lineare Äquivalenz den Schnittpunkt immer weiter hinausschieben bis er schließlich verschwindet. Wir haben drei Möglichkeiten dieses Problem zu umgehen:

- a) Wir können die Invarianz unter linearer Äquivalenz aufgeben. Dies werden wir nicht tun, da wir viel mit dieser Eigenschaft rechnen werden.
- b) Wir können die Menge der möglichen Divisoren einschränken. Diesen Ansatz werden wir, wie auch [Si2], in diesem Teil dieser Arbeit verfolgen. Wir müssen uns nur in einem Argument auf vertikale Divisoren beschränken und erreichen so, dass der Schnittpunkt sich immer auf einer bestimmten Faser befindet und nicht von der arithmetischen Fläche heruntergeschoben werden kann, da jede Faser vollständig ist.
- c) Die letzte interessante Möglichkeit ist, das Schema selbst zu vervollständigen. Diese Idee verfolgte Arakelov [Ar]. Dabei fügte er unendlich entfernte Faser ein, nämlich für jeden archimedischen Betrag eine. Wir werden diesen Ansatz hier nicht vertiefen, aber in Kapitel 3 noch einmal darauf zurückkommen.

Kommen wir jetzt zu der Schnittpaarung.

**Satz 1.40** (siehe [Si2] IV Theorem 7.2) *Sei  $C/R$  eine arithmetische Fläche. Dann existiert eine eindeutige Bilinearform*

$$i : \text{Div}(C) \times \text{Div}_v(C) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (D, F) \mapsto i(D, F) = D \cdot F,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- a) Falls  $D \in \text{Div}(C)$  und  $F \in \text{Div}_v(C)$  verschiedene irreduzible Divisoren sind, dann gilt

$$D \cdot F = \sum_{\nu \in M_K^0} \sum_{x \in D \cap F \cap C_\nu} i_x(D, F)[k(x) : k_\nu].$$

- b) Seien  $D_1, D_2 \in \text{Div}(C)$  und  $F \in \text{Div}_v(C)$  Divisoren sind mit  $D_1 \simeq D_2$ . Dann gilt

$$D_1 \cdot F = D_2 \cdot F.$$

Insbesondere gilt:

$$\text{div}(f) \cdot F = 0 \text{ für alle } f \in K(C)^* \text{ und alle } F \in \text{Div}_v(C)$$

- c) Falls  $F_1, F_2 \in \text{Div}_v(C)$  vertikale Divisoren sind, dann gilt

$$F_1 \cdot F_2 = F_2 \cdot F_1.$$

Die Bilinearform aus dem Satz bezeichnen wir als Schnittpaarung.

□

Wir erhalten also die Schnittzahl zweier allgemeiner Divisoren (einer davon vertikal), indem wir die Divisoren ausmultiplizieren, falls nötig linear verschieben und anschließend von je zwei verschiedenen irreduziblen Divisoren die lokalen Schnittzahlen berechnen.

Über die Schnittzahlen auf den speziellen Fasern einer arithmetische Fläche gibt es einige Ergebnisse.

**Satz 1.41** (siehe [Si2] Proposition 7.3) Sei  $\mathcal{C}/R$  eine reguläre arithmetische Fläche. Sei  $\mathcal{C}_\nu$  eine spezielle Faser von  $\mathcal{C}$  mit den entsprechenden Vielfachheiten. Dann gilt:

- a) Die spezielle Faser  $\mathcal{C}_\nu$  ist zusammenhängend.
- b) Sei  $F \in \text{Div}_\nu(\mathcal{C})$  ein vertikaler Divisor. Dann gilt  $F^2 \leq 0$  und die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent:
  - a)  $F^2 = 0$ ;
  - b)  $F \cdot F' = 0$  für jedes  $F' \in \text{Div}_\nu(\mathcal{C})$ ;
  - c)  $F = a\mathcal{C}_\nu$  mit  $a \in \mathbb{Q}$ .
- c) Sei  $F \in \text{Div}_\nu(\mathcal{C})$ , so gilt  $F \cdot \mathcal{C}_\nu = 0$ .

□

Für die Komponenten der speziellen Faser definiert man die Schnittmatrix.

**Definition 1.42** Sei  $\mathcal{C}_\nu = \sum n_i F_i$  die spezielle Faser als Summe von irreduziblen Komponenten  $F_i$  und ihren Vielfachheiten  $n_i > 0$ . Wir bezeichnen die Matrix  $(a_{ij})$  mit

$$a_{ij} = n_i F_i \cdot n_j F_j$$

als Schnittmatrix der Faser.

**Satz 1.43** (siehe [La] Proposition 3.3) Die Schnittmatrix  $(a_{ij})$  einer speziellen Faser hat die folgenden Eigenschaften:

- a) Die Schnittmatrix ist symmetrisch.
- b)  $a_{ij} \geq 0$ , falls  $i \neq j$ .
- c) Jede Reihen- und Spaltensumme ist Null, also  $\sum_j a_{ij} = \sum_i a_{ij} = 0$ .
- d) Für  $i \neq j$  bezeichnet man  $i$  verbunden mit  $j$ , falls  $a_{ij} > 0$ . Dann gibt es für je zwei verschiedene Indizes  $i$  und  $j$  eine Folge

$$i = i_0, i_1, \dots, i_m$$

mit der Eigenschaft, dass  $i_k$  mit  $i_{k+1}$  verbunden ist für alle  $0 \leq k < m$  und  $i_m = j$ .

□

**Beispiel 1.44** In Beispiel 1.38 haben wir die lokalen Schnittzahlen der Komponenten  $C_1$  und  $C_3$  der speziellen Faser der arithmetischen Fläche  $\mathcal{C}$  ausgerechnet. Alle anderen Berechnungen gehen analog und für die Schnittzahl von zwei verschiedenen Komponenten  $C_i$  und  $C_j$ , die sich schneiden, gilt immer  $C_i \cdot C_j = 1$ .

Es folgt für die Schnittmatrix.

$$\begin{pmatrix} C_1^2 & C_1 \cdot C_2 & C_1 \cdot 2C_3 & C_1 \cdot C_4 & C_1 \cdot C_5 \\ C_2 \cdot C_1 & C_2^2 & C_2 \cdot 2C_3 & C_2 \cdot C_4 & C_2 \cdot C_5 \\ 2C_3 \cdot C_1 & 2C_3 \cdot C_2 & 4C_3^2 & C_3 \cdot C_4 & 2C_3 \cdot C_5 \\ C_4 \cdot C_1 & C_4 \cdot C_2 & C_4 \cdot 2C_3 & C_4^2 & C_4 \cdot C_5 \\ C_5 \cdot C_1 & C_5 \cdot C_2 & C_5 \cdot 2C_3 & C_5 \cdot C_4 & C_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 2 Modelle von elliptischen Kurven

In diesem Kapitel wollen wir Modelle von elliptischen Kurven betrachten. Dafür müssen wir zunächst definieren, was eine elliptische Kurve ist.

**Definition 2.1** *Eine elliptische Kurve ist eine projektive glatte Kurve von Geschlecht 1 über einem Körper  $K$  mit einem ausgezeichneten Punkt  $o$ .*

Zuerst wollen wir den Begriff des Modells von elliptischen Kurven definieren. Das Modell einer elliptischen Kurve ist ein Schema mit bestimmten Eigenschaften.

Als erstes Beispiel eines Modells betrachten wir das Weierstraßmodell. Das Weierstraßmodell kommt direkt von der Weierstraßgleichung, die wir kurz wiederholen werden, und ist daher in vieler Hinsicht einfacher als andere Modelle.

Als nächstes betrachten wir das minimale, reguläre, eigentliche Modell einer elliptischen Kurve. Dieses Modell werden wir in Kapitel 4 in einem Beispiel für eine Kurve konstruieren und die algebraischen Schnittzahlen für einige Divisoren berechnen.

Zum Abschluss des Kapitels beschäftigen wir uns noch mit Hinsicht auf Kapitel 4 mit der Konstruktion von Modellen und werden uns ein paar Beispiele hierzu anschauen.

Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve. Zum Verständnis von  $E$  über  $K$  ist es häufig interessant zu wissen, wie sich  $E$  über den Restklassenkörpern von  $R$  verhält, da dort viele Informationen versteckt ist.

Um diese Information in eine Struktur zu packen, definiert man den Begriffs des Modells.

**Definition 2.2** *(siehe [Co] Definition 3.1) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve. Ein  $R$ -Modell von  $E$  ist ein Paar  $(\mathcal{E}, i)$  bestehend aus  $\mathcal{E}$ , einem flachen und separierten  $R$ -Schema, und  $i : \mathcal{E}_K \cong E$ , einem  $K$ -Isomorphismus. Falls  $\mathcal{E}$  ein reguläres Schema ist, so*

heißt  $\mathcal{E}$  ein reguläres  $R$ -Modell von  $E$  (analog mit anderen Eigenschaften, z.B. normal, eigentlich, endlicher Typ, usw.). Ein Morphismus von  $R$ -Modellen  $(\mathcal{E}, i) \rightarrow (\mathcal{E}', i')$  ist eine Abbildung  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ , sodass gilt  $i' \circ f_K = i$ .<sup>8</sup>

In Zukunft schreiben wir  $\mathcal{E}$  statt  $(\mathcal{E}, i)$ , solange es zu keinen Unklarheiten kommen kann.

## 2.1 Das Weierstraßmodell

Betrachtet man die Weierstraßgleichung mit ganzen Koeffizienten, so induziert die Gleichung in kanonischer Weise ein Schema, das Weierstraßmodell. Zuerst wiederholen wir den Begriff der Weierstraßgleichung und einige ihrer Eigenschaften.

**Definition 2.3** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve gegeben durch die Gleichung

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6, \quad a_i \in K. \quad (1)$$

Dann heißt die Gleichung (1) Weierstraßgleichung von  $E$ . Man sagt auch  $E$  sei gegeben durch die Weierstraßgleichung (1). Sind die  $a_i$  sogar in  $R$ , so redet man von einer ganzen Weierstraßgleichung.

Wie wichtig die Weierstraßgleichung zur Klassifizierung elliptischer Kurven ist, erläutert der folgende Satz.

**Satz 2.4** (siehe [Si1] III Lemma 3.1) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve mit ausgezeichnetem Punkt  $o$ .

a) Es existieren Funktionen  $x, y \in K(E)$ , sodass die Abbildung

$$\phi : E \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$\phi = [x, y, 1]$$

ein Isomorphismus von  $E/K$  auf die Kurve  $C$  ist, die gegeben wird durch die Weierstraßgleichung

$$C : Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6$$

mit Koeffizienten  $a_i \in K$ . Weiter gilt, dass  $\phi(o) = [0, 1, 0]$ .

(Wir nennen  $x, y$  die Weierstraß-Koordinatenfunktionen von  $E$ .)

b) Je zwei Weierstraßgleichungen für  $E$  wie in a) sind ineinander überführbar durch eine lineare Umformung der Variablen der Form

$$X = u^2X' + r$$

$$Y = u^3Y' + su^2X' + t$$

mit  $u, r, s, t \in K, u \neq 0$ .

---

<sup>8</sup> $f_K : \mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{E}'_K$  ist die Einschränkung von  $f$  auf  $\mathcal{E}_K$

c) Andererseits ist jede nichtsinguläre kubische Kurve  $C$  gegeben durch eine Weierstraßgleichung, wie in a) eine elliptische Kurve über  $K$  mit ausgezeichnetem Punkt  $o = [0, 1, 0]$ .

□

Der Weierstraßgleichung kann man einige Zahlen zuordnen. Für uns am wichtigsten ist die Diskriminante  $\Delta$ , welche ein Polynom in den Koeffizienten der Weierstraßgleichung ist.

**Definition 2.5** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve gegeben durch die Weierstraßgleichung

$$W : Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6,$$

so definiert man Zahlen

$$b_2 = a_1 + 4a_2, \quad b_4 = 2a_4 + a_1a_3, \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6, \quad b_8 = (b_2b_6 - b_4^2)/4.$$

Die Diskriminante  $\Delta$  ist gegen durch

$$\Delta = \Delta_W = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6.$$

Sei im Folgenden  $\nu$  eine diskrete Bewertung, also  $\nu \in M_K^0$ .

Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve gegeben durch die Weierstraßgleichung

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

mit  $a_i \in K$ . Indem wir  $(x, y)$  durch  $(u^{-2}x, u^{-3}y)$  ersetzen erreichen wir, dass jedes  $a_i$  zu  $u^i a_i$  wird. Durch geschickte Wahl können wir so aus einer beliebigen Weierstraßgleichung von  $E$  immer eine ganze Weierstraßgleichung von  $E$  gewinnen. Damit gilt für die Diskriminante  $\Delta$ , dass  $\nu(\Delta) \geq 0$ . Also können wir, da  $\nu$  diskret ist, eine ganze Weierstraßgleichung finden, deren Diskriminante die minimale Bewertung hat.

**Definition 2.6** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve. Eine ganze Weierstraßgleichung heißt minimale Weierstraßgleichung für  $E$  in  $\nu$ , falls  $\nu(\Delta)$  minimal ist. Der Wert von  $\nu(\Delta)$  heißt die Bewertung der minimalen Diskriminante von  $E$  in  $\nu$ .

Der folgende Satz ist ein Kriterium um herauszufinden, ob eine Weierstraßgleichung minimal ist.

**Satz 2.7** (siehe [Si1] VII Remark 1.1) Die Diskriminante einer ganzen Weierstraßgleichung ist genau dann minimal in  $\nu$ , wenn  $\nu(\Delta) < 12$ .

□

Wie man sieht, existiert lokal, d.h für ein  $\nu$ , immer eine minimale Weierstraßgleichung. Betrachten man aber alle  $\nu \in M_K^0$  gleichzeitig, so muss es global keine minimale Weierstraßgleichung geben (vgl. [Si1] Kapitel VIII).

Die Diskriminante beschreibt das Verhalten einer elliptischen Kurve bei der Reduktion modulo  $\nu$ .

Grundlegend hierfür ist die natürliche Projektion auf den Restklassenkörper

$$R_\nu \rightarrow k_\nu, t \mapsto \bar{t}.$$

**Definition 2.8** Sei  $E$  gegeben durch die minimale Weierstraßgleichung

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Reduzieren wir die Koeffizienten modulo  $\pi_\nu$  (oder kurz  $\nu$ ), so erhalten wir die möglicherweise singuläre Kurve

$$E_\nu : y^2 + \bar{a}_1xy + \bar{a}_3y = x^3 + \bar{a}_2x^2 + \bar{a}_4x + \bar{a}_6.$$

Die Kurve  $E_\nu/k_\nu$  nennt man Reduktion von  $E$  modulo  $\nu$ .

**Bemerkung 2.9** Da wir mit einer minimalen Weierstraßgleichung beginnen, ist die Kurve  $E_\nu/k_\nu$  bis auf Koordinatentransformation eindeutig.

Sei  $P \in E(K)$ . Wir können homogene Koordinaten  $[x : y : z]$  für  $P$  wählen, sodass  $x, y, z \in R_\nu$  und mindestens eines davon eine Einheit ist.

Der reduzierte Punkt  $P_\nu = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$  ist somit ein Punkt in  $E_\nu(k_\nu)$ . Dies definiert eine Abbildung.

**Definition 2.10** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve. Dann induziert die Projektion eine Abbildung

$$\begin{aligned} E(K) &\rightarrow E_\nu(k_\nu) \\ P &\rightarrow P_\nu \end{aligned}$$

Diese Abbildung heißt Reduktionsabbildung modulo  $\nu$  der Punkte von  $E(K)$ .

**Definition 2.11** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve. Man sagt  $E$  besitzt gute Reduktion modulo  $\nu$ , falls  $E_\nu$  keine singulären Punkte enthält. Ansonsten besitzt  $E$  schlechte Reduktion modulo  $\nu$ .

Die Diskriminante sagt aus, ob  $E_\nu$  einen singulären Punkt besitzt. Wir können den singulären Punkt sogar noch weiter klassifizieren.

**Definition 2.12** Sei  $C/K$  eine kubische Kurve mit einem singulärem Punkt.

- a) Man nennt  $x$  eine Spitze, falls in  $x$  nur eine Tangentialrichtung existiert.
- b) Man nennt  $x$  ein Knoten, falls in  $x$  zwei Tangentialrichtungen existieren.

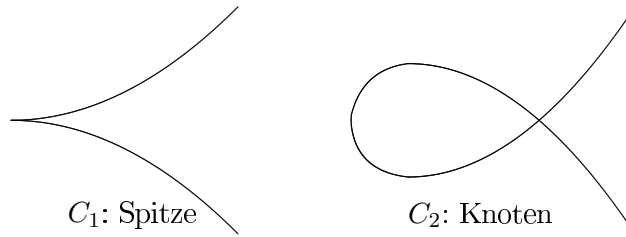


Abbildung 5: Beispiel einer Spitze ( $C_1 : y^2 = x^3$ ) und eines Knotens ( $C_2 : y^2 = x^2(x+1)$ )

In Abbildung 5 sieht man eine Kurve mit einer Spitze und eine Kurve mit einem Knoten.

**Satz 2.13** (siehe [Si1] III Proposition 1.4) Sei  $E$  eine elliptische Kurve,  $W$  eine minimale Weierstraßgleichung von  $E$  in  $\nu$  und sei  $c_4 = b_2^2 - 24b_4$  (vgl. Definition 2.5). Die Reduktion  $E_\nu$  besitzt höchstens einen singulären Punkt und es gilt

- a)  $E_\nu$  ist eine nichtsinguläre Kurve genau dann, wenn  $\Delta_W \neq 0$ .
- b)  $E_\nu$  besitzt genau dann einen Knoten, wenn  $\Delta_W = 0$  und  $c_4 \neq 0$ .
- c)  $E_\nu$  besitzt genau dann eine Spitze, wenn  $\Delta_W = c_4 = 0$ .

□

Kommen wir jetzt zu dem Weierstraßmodell.

**Definition 2.14** (siehe [Co] Definition 2.2) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve mit ausgezeichneten Punkt  $o$ . Ein planares ganzes Weierstraßmodell von  $E$  über  $R$  ist ein Paar  $(W, i)$ , mit  $W$  einem abgeschlossenem Unterschema in  $\mathbb{P}_R^2$  definiert durch eine Weierstraßgleichung

$$y^2z + a_1xyz + a_3yz^3 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$$

und einem Isomorphismus  $i : W_K \cong E$ , der den Punkt  $[0, 1, 0]$  auf  $o$  abbildet. Ein Morphismus  $(W, i) \rightarrow (W', i')$  zwischen zwei planaren Weierstraßmodellen von  $E$  ist eine  $R$ -Abbildung  $f : W \rightarrow W'$ , sodass  $i' \circ f_K = i$  gilt.

Wie auch schon bei den Modellen unterdrücken wir  $i$  und schreiben, solange Klarheit herrscht, nur  $W$  für  $(W, i)$ .

**Bemerkung 2.15** Das planare ganze Weierstraßmodell von  $E$  ist also gegeben durch

$$W = \text{Proj } R[x, y, z]/(y^2z + a_1xyz + a_3yz^3 - x^3 - a_2x^2z - a_4xz^2 - a_6z^3).$$

**Satz 2.16** (siehe [Si2] IV Corollary 4.4) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $W/R$  ein Weierstraßmodell von  $E$ . Dann gilt

$$E(K) = W(R).$$

□

**Definition 2.17** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $W$  ein Weierstraßmodell.  $W$  ist ein minimales Weierstraßmodell, wenn die zu ihr assoziierte ganze Weierstraßgleichung eine minimale Weierstraßgleichung ist.

Wie bei den Weierstraßgleichungen existiert immer ein lokal minimales Weierstraßmodell, aber ein global (das heißt für alle diskreten  $\nu$  gleichzeitig) minimales Weierstraßmodell existiert allgemein nicht.

Das folgende Beispiel zeigt, dass ein Weierstraßmodell im allgemeinen nicht regulär sein muss.

**Beispiel 2.18** Sei  $E/\mathbb{Q}$  gegeben durch die Weierstraßgleichung

$$W_1 : y^2 = x^3 + 64$$

Man errechnet  $\Delta_{W_1} = -3^3 \cdot 2^{16}$  also ist die Gleichung nicht minimal. Ersetzt man aber  $x \mapsto 2^2x$  und  $y \mapsto 2^3y$  und teilt durch  $2^6$  so ergibt sich die minimale Weierstraßgleichung

$$W_2 : y^2 = x^3 + 1$$

mit  $\Delta_{W_2} = -3^3 \cdot 2^4$ .  $W_2$  besitzt also überall außerhalb (2) und (3) gute Reduktion.

Sei  $W/\mathbb{Z}$  das von  $W_2$  erzeugte Schema, also

$$W = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1).$$

In der Faser über (2) ist der Punkt  $P_2 = V((x, y - 1, 2))$  singular. Um zu Überprüfen, ob  $P_2$  regulär ist, betrachten wir

$$\mathcal{O}_{P_2} = (\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1))_{\langle (x, y-1, 2) \rangle} = \mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x, y-1, 2) \rangle} / ((y-1)^2 + 2(y-1) - x^3).$$

Der Ring  $\mathcal{O}_{P_2}$  ist nach Satz 1.16 nichtregulär, da  $\mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x, y-1, 2) \rangle}$  ein regulärer, Noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_{P_2} = (x, y - 1, 2)$  ist und  $((y - 1)^2 + 2(y - 1) - x^3) \in \mathfrak{m}_{P_2}^2$ . Also ist  $W$  in  $P_2$  nichtregulär.

In der Faser über (3) ist der Punkt  $P_3 = V((x + 1, y, 3))$  singular. Zum Überprüfen, ob  $P_3$  regulär ist, betrachten wir

$$\mathcal{O}_{P_3} = (\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 1))_{\langle (x+1, y, 3) \rangle} = \mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x+1, y, 3) \rangle} / ((y^2 - (x+1)^3 + 3x(x+1))).$$

Der Ring  $\mathcal{O}_{P_3}$  ist nach Satz 1.16 nichtregulär, da  $\mathbb{Z}[x, y]_{\langle (x+1, y, 3) \rangle}$  ein regulärer, Noetherscher, lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}_{P_3} = (x + 1, y, 3)$  ist und  $(y^2 - (x + 1)^3 + 3x(x + 1)) \in \mathfrak{m}_{P_3}^2$ . Also ist  $W$  in  $P_3$  nichtregulär.

Dieses Weierstraßmodell ist also nichtregulär, also insbesondere keine arithmetische Fläche.



Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $W/R$  ein minimales Weierstraßmodell von  $E/K$ . Sei  $P \in E(K)$ . Der Divisor  $\bar{P}$  schneidet die Faser  $W_\nu$  in genau einem Punkt, den wir mit  $P_{W_\nu}$  bezeichnen.

**Satz 2.19** *Sei  $W/R$  das Weierstraßmodell einer elliptischen Kurve  $E/K$  und  $P \in E(K)$ . Für den Schnittpunkt  $P_{W_\nu}$  des Zariski-Abschlusses  $\bar{P}$  von  $P$  in  $W$  mit der Faser  $W_\nu$  gilt*

$$P_{W_\nu} = P_\nu,$$

hierbei ist  $P_\nu$  die Reduktion von  $P$  modulo  $\nu$ .

**Beweis** Sei  $P \in E(K)$ . Wieder können wir homogene Koordinaten  $[x_0 : y_0 : z_0]$  für  $P$  wählen, sodass  $x, y, z \in R_\nu$  und mindestens eines davon eine Einheit ist. Dann ist der Zariski-Abschluss  $\bar{P}$  von  $P$  gegeben durch  $\bar{P} = V((y_0x - x_0y, z_0x - x_0z, z_0y - y_0z))$ . Betrachten wir jetzt den Schnittpunkt mit der Faser  $W_\nu = V((\pi_\nu))$ , so gilt

$$\begin{aligned} P_{W_\nu} = \bar{P} \cap W_\nu &= V((y_0x - x_0y, z_0x - x_0z, z_0y - y_0z)) \cap V((\pi_\nu)) \\ &= V((y_0x - x_0y, z_0x - x_0z, z_0y - y_0z, \pi_\nu)) \\ &= V((\bar{y}_0x - \bar{x}_0y, \bar{z}_0x - \bar{x}_0z, \bar{z}_0y - \bar{y}_0z, \pi_\nu)) \\ &= P_\nu. \end{aligned}$$

□

## 2.2 Das minimale, reguläre, eigentliche Modell

Wie wir in Beispiel 2.18 gesehen haben, kann das Weierstraßmodell regulär sein, muss es aber nicht. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der Frage beschäftigen, ob es immer ein reguläres Modell gibt. Die Motivation dafür gibt der folgende Satz:

**Satz 2.20** *(siehe [Si1] IV Corollary 4.4) Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche und sei  $\mathcal{C}/K$  die generische Faser von  $\mathcal{C}$ . Dann gilt*

$$\mathcal{C}(K) = \mathcal{C}(R) = \mathcal{C}^0(R)$$

□

Auf einer arithmetischen Fläche lässt sich in eindeutiger Weise jeder  $K$ -Punkt von der generischen Faser zu einem glatten  $R$ -Punkt auf  $\mathcal{C}$  erweitern. Dies wirft natürlich die Frage auf, ob eine solche Fläche immer existiert und ob es unter den regulären, eigentlichen Modellen ein in gewisser Weise minimales gibt. Beide Fragen werden in folgendem Satz beantwortet.

**Satz 2.21** *(siehe [Si2] IV Theorem 4.5) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve.*

(a) *Es existiert eine arithmetische Fläche  $\mathcal{E}$ , deren generische Faser isomorph zu  $E/K$  ist. Wir nennen  $\mathcal{E}/R$  ein reguläres, eigentliches Modell für  $E/K$ .*

(b) *Es existiert ein reguläres, eigentliches Modell  $\mathcal{E}^{\min}/R$  für  $E/K$  das im folgenden Sinne minimal ist:*

*Sei  $\mathcal{E}/R$  eine anderes reguläres, eigentliches Modell für  $E/K$ . Fixiere einen Isomorphismus von der generischen Faser von  $\mathcal{E}$  zu der generischen Faser von  $\mathcal{E}^{\min}$ . Dann ist die induzierte  $R$ -birationale Abbildung*

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\min}$$

*ein  $R$ -Isomorphismus. Wir nennen  $\mathcal{E}^{\min}/R$  das minimale, reguläre, eigentliche Modell von  $E/K$ . Es ist bis auf  $R$ -Isomorphismen eindeutig.*

□

**Bemerkung 2.22** Ist ein minimales Weierstraßmodell regulär, so ist es ein minimales, reguläres, eigentliches Modell.

### 2.3 Konstruktion des minimalen, regulären, eigentlichen Modells

Bis jetzt können wir nur das Weierstraßmodell konstruieren. Bei der Konstruktion des minimalen, regulären, eigentlichen Modells hilft die reguläre Auflösung des Weierstraßmodells.

**Satz 2.23** *Sei  $R$  ein Dedekindring und  $W/R$  ein Weierstraßmodell der elliptischen Kurve  $E/K$ . Nach endlich vielen Aufblasungen der singulären Punkte von  $W$  bekommt man ein reguläres eigentliches Modell  $W^{\text{reg}}$ , die minimale, reguläre Auflösung von  $W$ .*

□

Diesen Satz muss man mit Vorsicht genießen, da es nicht reicht, jeden nichtregulären Punkt einmal aufzublasen. Durch eine Aufblasung können neue nichtreguläre Punkte entstehen. So sind zum Beispiel in Beispiel 1.32 drei Punkte der Komponente  $\mathcal{C}_3$  nichtregulär.

Mit Hilfe des Satzes kann man ein reguläres eigentliches Modell von  $E/K$  konstruieren, welches aber nicht minimal sein muss.

**Satz 2.24** *(siehe [Co] Corollary 4.7) Sei  $W/R$  das Weierstraßmodell einer elliptischen Kurve  $E/K$ . Die minimale, reguläre Auflösung  $W^{\text{reg}}$  von  $W$  ist genau dann ein minimales, reguläres, eigentliches Modell, wenn  $W$  ein minimales Weierstraßmodell ist.*

□

Was macht man aber, falls  $W$  kein minimales Weierstraßmodell ist? In dem Falle gibt es exzeptionelle Kurven. Im Falle von algebraisch abgeschlossenen Körpern hat das bereits Castelnuovo gezeigt ([Ha] V §2).

**Definition 2.25** Eine Kurve  $C$  ist eine *exzeptionelle Kurve*, falls sie isomorph zu  $\mathbb{P}^1$  und ihr Selbstschnitt  $-1$  ist. Also

$$C \simeq \mathbb{P}^1 \text{ und } C \cdot C = -1.$$

Weiter zeigte er, dass eine endliche Anzahl von Abblasungen alle exzeptionellen Kurve verschwinden lässt und das resultierende Modell ein minimales, reguläres, eigentliches Modell ist.

Kommen wir jetzt zu einem Beispiel.

**Beispiel 2.26** Sei  $E$  die elliptische Kurve aus Beispiel 1.18 definiert durch die Gleichung

$$E : y^2 = x^3 + x^2 - 32x + 60.$$

Die Diskriminante von  $E$  ist  $\Delta_E = 1536 = 2^9 \cdot 3$ , also gibt es nur in den Faser über (2) und (3) je einen nichtsingulären Punkt. In Beispiel 1.18 hatten wir gezeigt, dass der singuläre Punkt in der Faser über (3) regulär und der in der Faser über (2) nichtregulär ist. Danach haben wir in Beispiel 1.32 und 1.33 die Faser  $W_{(2)}$  aufgeblasen bis es keinen nichtregulären Punkt mehr gab.

$\mathcal{C}/\mathbb{Z}$  ist also nach Satz 2.24 ein minimales, reguläres, eigentliches Modell für  $E/\mathbb{Q}$ , da wir mit einem minimalen Weierstraßmodell angefangen haben.

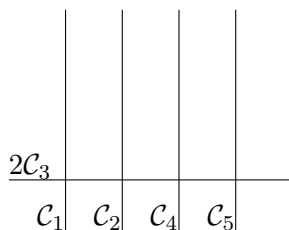


Abbildung 6: Die Faser über (2) des minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve  $E$  aus Beispiel 2.26

Was wir in Beispiel 1.32 ausgeführt haben, hat Tate in einer schönen Weise in einen Algorithmus verpackt (siehe [Si2] IV §9). Tate hat es geschafft den Algorithmus so zu formulieren, dass man sich nur die Teilbarkeit der Koeffizienten, als auch der  $b'_i$ s und der Diskriminante anschauen muss, um herauszufinden welche Gestalt die spezielle Faser hat(mehr dazu in Abschnitt 2.4). Die ganze Theorie, wie eben in Beispiel 1.32, ist dabei elegant im Beweis versteckt.

Wir können jetzt zu einer elliptischen Kurve das minimale, reguläre, eigentliche Modell konstruieren, indem wir das Weierstraßmodell Faser für Faser bearbeiten, also alle nicht-regulären Punkte aufblasen und gegebenenfalls noch exzeptionelle Kurven abblasen.

## 2.4 Die spezielle Faser des minimalen, regulären, eigentlichen Modells

Betrachten man die spezielle Faser des minimalen, regulären, eigentlichen Modells einer elliptischen Kurve, so zeigt der folgende Satz, dass die Schnittzahlen nicht so zufällig sind, wie man denken könnte. Wichtig ist insbesondere die letzte Formel in 4., da sie eine genau Klassifikation der speziellen Fasern eines minimalen, regulären, eigentlichen Modell erlaubt.

**Satz 2.27** (siehe [Si2] IV Proposition 8.1) Sei  $R$  ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}$ , Quotientenkörper  $K$  und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$ . Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und sei  $\mathcal{E}/R$  ein minimales, reguläres, eigentliches Modell für  $E/K$ . Nehmen wir jetzt an die spezielle Faser von  $\mathcal{E}$  enthalte  $r$  irreduzible Komponenten. Seien diese irreduzible Komponenten  $C_1, \dots, C_r$  mit der speziellen Faser geschrieben als

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^r n_i C_i.$$

Dann gilt

- a) Mindestens ein  $n_i$  ist gleich 1.
- b) Sei  $K_{\mathcal{E}}$  ein kanonischer Divisor auf  $\mathcal{E}$  (d.h. der Divisor eines Differentials). Dann gilt

$$K_{\mathcal{E}} \cdot F = 0 \text{ für alle vertikalen Divisoren } F \in \text{Div}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{E})$$

- c) Falls  $r = 1$  gilt  $C_1^2 = 0$  und  $p_a(C_1) = 1$ .
- d) Falls  $r \geq 2$ . Dann gilt für jedes  $1 \leq i \leq r$

$$C_i^2 = -2, \quad C_i \cong \mathbb{P}_k^1, \quad \text{und} \quad \sum_{1 \leq j \leq r, j \neq i} n_j C_j \cdot C_i = 2n_i.$$

□

Mit Hilfe von kombinatorischen Mitteln kann man jetzt alle möglichen speziellen Fasern eines minimalen, regulären, eigentlichen Modell klassifizieren. Wir geben hier wie in [Si2] die Kodaira-Néron-Klassifizierung an.

**Satz 2.28** (siehe [Si2] IV Theorem 8.2) Sei  $R$  ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{p}$ , Quotientenkörper  $K$  und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper  $k$ . Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und sei  $\mathcal{E}/R$  ein minimales, reguläres, eigentliches Modell für  $E/K$ . Dann besitzt die spezielle Faser  $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$  eine der folgenden Formen.

**Typ  $I_0$**   $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$  ist eine nichtsinguläre Kurve von Geschlecht 1.

**Typ  $I_1$**   $\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}$  ist eine rationale Kurve mit einem Knoten.

**Typ  $I_n$**   $\mathcal{E}_p$  besteht aus  $n$  nichtsingulären Kurven die, wenn  $n \geq 2$ , in einem  $n$ -Eck angeordnet sind.

**Typ II**  $\mathcal{E}_p$  ist eine rationale Kurve mit einer Spitze.

**Typ III**  $\mathcal{E}_p$  besteht aus zwei nichtsingulären rationalen Kurven, die sich tangential in einem Punkt treffen.

**Typ IV**  $\mathcal{E}_p$  besteht aus drei nichtsingulären rationalen Kurven, die sich in einem einzigen Punkt treffen.

**Typ  $I_0^*$**   $\mathcal{E}_p$  besteht aus einer nichtsingulären rationalen Kurve der Vielfachheit 2 mit vier nichtsingulären rationalen Kurven der Vielfachheit 2 angehängt.

**Typ  $I_n^*$**   $\mathcal{E}_p$  besteht aus einer Kette von  $n + 1$  nichtsingulären rationalen Kurven der Vielfachheit 2 mit 2 nichtsingulären rationalen Kurven der Vielfachheit 1 angebracht an jedem Ende.

**Typ IV\***  $\mathcal{E}_p$  besteht aus sieben nichtsingulären rationalen Kurven.

**Typ III\***  $\mathcal{E}_p$  besteht aus acht nichtsingulären rationalen Kurven.

**Typ II\***  $\mathcal{E}_p$  besteht aus neun nichtsingulären rationalen Kurven.

Die Anordnungen und die Vielfachheiten der Komponenten sind in Abbildung 7 auf Seite 46 angedeutet.

□

Wie bereits gesagt liefert der Algorithmus von Tate eine Möglichkeit herauszufinden, von welchem Typ eine spezielle Faser eines minimalen, regulären, eigentlichen Modells ist. Wir wollen hier aber nicht näher auf den Algorithmus eingehen.

## 2.5 Der Schnittpunkt horizontaler Primdivisoren mit der speziellen Faser

Wir hatten in Satz 2.19 gesehen wie man im Falle des Weierstraßmodells den Schnittpunkt eines horizontalen Primdivisors mit der speziellen Faser findet. Im Falle des minimalen Modells ist die Angelegenheit etwas komplizierter. Allgemein definieren wir für ein Modell  $M/R$  und ein Bewertung  $\nu \in M_K^0$

$$\tau_\nu^M : E(K) \rightarrow M, P \mapsto \overline{P} \cap M_\nu.$$

Wie auch in Lemma 2.19 wollen wir  $\tau_\nu^M$  explizit konstruieren.

Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $W/R$  ein minimales Weierstraßmodell von  $E/K$ . Wir konstruieren in dieser Arbeit das minimale, reguläre, eigentliche Modell  $\mathcal{E}$  durch eine endliche Anzahl von Aufblasungen

$$\mathcal{E} = W_{n_0} \rightarrow W_{n_0-1} \rightarrow \cdots \rightarrow W_1 \rightarrow W_0 = W$$

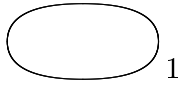
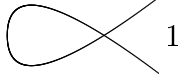
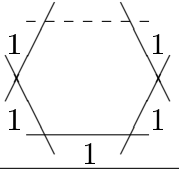


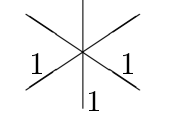
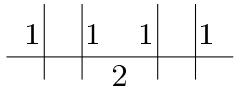
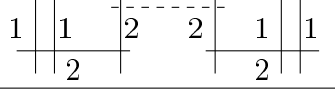
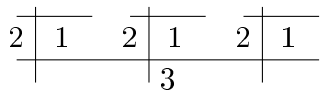
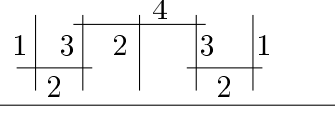
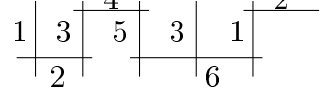
Reduktions Typ	Anzahl der Komponenten	Anordnung(mit Vielfachheiten)
$I_0$	1	
$I_1$	1	
$I_n$	$n$	
$II$	1	
$III$	2	
$IV$	3	
$I_0^*$	5	
$I_n^*$	$n + 5$	
$IV^*$	7	
$III^*$	8	
$II^*$	9	

Abbildung 7: Die Kodaira Klassifikation für die speziellen Fasern

aus dem minimalen Weierstraßmodell. Die Abbildungen der Aufblasung sind also der Schlüssel zu einer explizit berechenbaren Abbildung.

Sei  $N(\mathcal{I}) \subset W$  die Menge der nichtregulären Punkte des Zentrums  $V(\mathcal{I})$  und  $U = \text{Spec } A$  eine offene, affine Umgebung mit  $N(\mathcal{I}) \subset U$ . Wir bezeichnen die Inklusion von  $U$  in  $W$  mit  $i : U \hookrightarrow W$ .

Sei  $\mathcal{I}(U) = I = (f_i)$ , mit  $f_i \in \{x, y, \pi_\nu\}$ .

Nach Lemma 1.27 ist die Aufblasung  $X$  die Vereinigung der affinen, offenen Unterschemata  $\text{Spec } A_i$ , wobei  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  die  $A$ -Unteralgebra von  $\text{Quot}(A)$  erzeugt von den  $f_j f_i^{-1} \in \text{Quot}(A)$  ist. Dies gibt für jedes  $i$  eine Abbildung

$$\phi_i : \text{Spec } A_i \rightarrow U, \mathfrak{p} \mapsto \phi_i(\mathfrak{p}).$$

Die Abbildung  $\phi_i$  ist injektiv und induziert so einen Isomorphismus

$$\phi_i : \text{Spec } A_i \rightarrow \phi_i(\text{Spec } A_i).$$

Sei  $B(f_i)$  die Menge

$$B(f_i) := \{P \in E(K) \mid P_\nu \in i(\phi_i(A_i))\} \subset E(K).$$

Der Isomorphismus  $\phi_i$  induziert nun eine Abbildung

$$\psi_i : B(f_i) \rightarrow W_1.$$

Weiter definieren wir die Menge

$$B_\infty := \{P \in E(K) \mid \alpha(P_\nu) \notin U\} \subset E(K),$$

und eine Abbildung  $\psi_\infty : B_\infty \rightarrow W_1$  mittels

$$\psi_\infty(P) = \phi^{-1}(P_\nu),$$

die nach Lemma 1.29 wohldefiniert ist, da  $P_\nu \notin N(\mathcal{I})$ .

Weiter gilt

$$B_\infty \cup \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} B(f_i) = E(K).$$

Mittels der Verklebeabbildungen kann man jetzt zeigen, dass die Abbildung auf den Schnittmengen übereinstimmt. Wir werden dies aus Platzgründen hier aber nicht zeigen.

Diese Beobachtungen erlauben uns die Definition der Abbildung  $\psi^1 : E(K) \rightarrow W_1$  mittels

$$P \mapsto \begin{cases} \psi_i(P) & , \text{ falls } P \in B(f_i) \\ \psi_\infty(P) & , \text{ falls } P \in B_\infty. \end{cases}$$

Aus der Konstruktion folgt nun der Satz

**Satz 2.29** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $W/R$  das minimale Weierstraßmodell von  $E$ . Weiter sei  $V(I) \subset W_\pi \subset W$  ein irreduzibles Unterschema und  $\phi : W_1 \rightarrow W$  die Aufblasung von  $W$  entlang  $V(I)$ . Dann gilt für alle  $P \in E(K)$

$$\tau_\nu^{W_1}(P) = \psi^1(P).$$

□

Sei jetzt  $W_{n+1}$  die  $n+1$ -te Aufblasung des minimalen Weierstraßmodells. Wir können induktiv eine Abbildung  $\psi^{n+1} : E(K) \rightarrow W_{n+1}$  analog zur obigen Konstruktion definieren und bekommen so

**Satz 2.30** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve,  $W/R$  das minimale Weierstraßmodell von  $E$  und  $\phi : W_n \rightarrow W$  die  $n$ -te Aufblasung von  $W$ . Dann gilt für alle  $P \in E(K)$

$$\tau_\nu^{W_{n+1}}(P) = \psi^{n+1}(P).$$

□

Da man nach endlich vielen Aufblasungen  $W_{n_0}$  mit  $\mathcal{E}$ , dem minimalen, regulären, eigentlichen Modell von  $E$ , übereinstimmt, ergibt sich der folgende Satz.

**Satz 2.31** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $\mathcal{E}/R$  das minimale, reguläre, eigentliche Modell von  $E$ . Dann gilt für alle  $P \in E(K)$

$$\tau_\nu^{\mathcal{E}}(P) = \psi^{n_0}(P).$$

Wir schreiben auch  $\tau_\nu$  für  $\tau_\nu^{\mathcal{E}}$ .

□

**Satz 2.32** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve,  $W/R$  das minimale Weierstraßmodell von  $E$ ,  $W_n$  die  $n$ -te Aufblasung von  $W$  und  $P \in E(K)$ . Die spezielle Faser  $W_{n,\nu}$  besitze die Darstellung  $W_{n,\nu} = \sum n_i C_i$  in irreduzible Komponenten  $C_i$  und entsprechenden Vielfachheiten  $n_i$ . Es sei weiter  $N_i$  die Menge der nichtregulären Punkte von  $W_n$  die auf  $C_i$  liegen. Dann gilt, falls  $n_i \geq 1$  und  $\psi^n(P) \in C_i$ , dass  $\psi^n(P) \in N_i$

**Beweis** Angenommen  $\psi^n(P) = Q \in C_i \setminus N_i$ . Dann wäre  $Q$  ein singulärer Punkt von  $W_n$  und nach Lemma 1.29 auch ein singulärer Punkt auf  $\mathcal{E}$ . Das ist ein Widerspruch zu Satz 2.20 nach dem gilt  $C(K) = \mathcal{C}^0(R)$ , also der Schnittpunkt des Zariski-Abschlusses eines Punktes  $P$  mit der speziellen Faser ein nichtsingulärer Punkt ist.

□



### 3 Kühns Formel für die Néron-Tate-Höhe

In Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, dass man Schnittpunkte beliebiger Divisoren mittels lineare Äquivalenz von einer arithmetischen Fläche herunterschieben konnte. Arakelov hat gezeigt, dass man die arithmetische Fläche vervollständigen kann, indem man eine Faser für jede archimedische Bewertung hinzufügt. Es ergibt sich, wenn man die Schnittpaarung noch geeignet verändert und um diese neuen Fasern erweitert, dass man eine Bilinearform auf der gesamten Divisorengruppe bekommt. Faltings und Hriljac (siehe [Hr]) haben diese erweiterte Schnittpaarung näher untersucht und herausgefunden, dass es einen engen Zusammenhang zwischen dieser Schnittpaarung und der Néron-Tate-Höhe gibt. Dieser Zusammenhang wurde vorher bereits von Manin auf elliptischen Flächen beobachtet (siehe [Si2] III Theorem 9.3).

Wir wollen in diesem Kapitel zuerst die Höhe auf elliptischen Kurven untersuchen und sie als Néron-Tate-Höhe auf Divisoren erweitern. Danach besprechen wir den Artikel [Hr] von Hriljac indem wir zuerst unsere arithmetische Fläche entsprechend erweitern und dann den Zusammenhang zwischen der Schnittpaarung und der Néron-Tate-Höhe formulieren. Als letztes behandeln wir [Kü2], in dem Ulf Kühn eine konstruktive Methode gibt, um die Néron-Tate-Höhe mittels der Arakelov-Schnittzahl zu berechnen.

#### 3.1 Die Néron-Tate-Paarung

Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve.

Wir betrachten Höhenfunktionen  $E$  (siehe [Si1] VIII §6).

Sei  $f \in \bar{K}(E)$  eine Funktion. Dann induziert  $f$  eine Funktion

$$f : E \rightarrow \mathbb{P}^1$$

$$P \mapsto \begin{cases} [1, 0], & \text{falls } P \text{ ein Pol von } f \text{ ist und} \\ [f(P), 1] & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Definition 3.1** Die von  $f$  induzierte Höhe auf  $E$  ist definiert durch

$$h_f : E(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_f(P) = \log(H_K(f(P))^{1/[K:\mathbb{Q}]}) \text{ (positive Wurzel),}$$

mit

$$H_K(f(P)) = \prod_{\nu \in M_K} \max\{|f(P)_0|_{\nu}, 1\}^{[K:\mathbb{Q}]_{\nu}},$$

wobei  $K_{\nu}$  und  $\mathbb{Q}_{\nu}$  die Komplettierungen bezüglich der Bewertung  $\nu$  sind.

Betrachten man Höhenfunktionen näher, so fällt auf, dass sie fast quadratische Formen sind. Néron fragte daraufhin, ob es auch eine Höhenfunktion gibt, die eine quadratische

Form ist. Diese Frage konnte Néron selbst positiv beantworten, aber auch Tate fand unabhängig von ihm gleichzeitig eine Lösung. Da Tates Definition einfacher ist, halten wir uns hier an Tate.

Wir benötigen zuerst die Notation, die die Gruppe der rationalen Punkte einer elliptischen Kurve zu einem  $\mathbb{Z}$ -Modul werden lässt. Wir schreiben also

$$[m]P = P + P + \cdots + P \quad (m \text{ mal}).$$

Tate hat folgendes Lemma gezeigt.

**Lemma 3.2** (Tate, siehe [Si1] VIII Proposition 9.1) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve,  $f \in K(E)$  eine nichtkonstante gerade<sup>9</sup> Funktion und  $P \in E(\bar{K})$ . Dann existiert der Grenzwert

$$\frac{1}{\deg(f)} \lim_{N \rightarrow \infty} 4^{-N} h_f([2^N]P)$$

und ist unabhängig von der Funktion  $f$ .

□

Dieses Ergebnis motiviert die folgende Definition.

**Definition 3.3** (siehe [Si1] VIII §9) Die kanonische (oder Néron-Tate-) Höhe auf  $E/K$   $\hat{h}$  oder genauer  $\hat{h}_E$  ist die Funktion

$$\hat{h} : E(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\hat{h}(P) = \frac{1}{\deg(f)} \lim_{N \rightarrow \infty} 4^{-N} h_f([2^N]P).$$

Hierbei ist  $f \in K(E)$  eine nichtkonstante gerade Funktion.

Der folgende Satz zeigt, welche Eigenschaften die kanonische Höhe besitzt.

**Satz 3.4** (Néron-Tate, siehe [Si1] VIII Theorem 9.3) Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $\hat{h}$  die kanonische Höhe auf  $E$ .

a) Für alle  $P, Q \in E$  gilt

$$\hat{h}(P + Q) + \hat{h}(P - Q) = 2\hat{h}(P) + 2\hat{h}(Q).$$

b) Für alle  $P \in E$  und  $m \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\hat{h}([m]P) = m^2 \hat{h}(P).$$

---

<sup>9</sup>eine Funktion  $f \in \bar{K}(E)$  heißt gerade, falls für alle  $P \in E$  gilt, dass  $f(P) = f(-P)$

c) Die kanonische Höhe  $\hat{h}$  ist eine quadratische Form auf  $E$ . Also  $\hat{h}$  ist gerade und die Paarung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{NT}: E(\bar{K}) \times E(\bar{K}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \langle P, Q \rangle_{NT} &= \frac{1}{2}(\hat{h}(P+Q) - \hat{h}(P) - \hat{h}(Q)) \end{aligned}$$

ist bilinear.

d) Sei  $P \in E$ . Dann ist  $\hat{h}(P) \geq 0$  und

$$\hat{h}(P) = 0 \text{ genau dann, wenn } P \text{ ein Torsionspunkt ist.}$$

e) Sei  $f \in K$  eine gerade Funktion. Dann gilt

$$(\deg f)\hat{h} = h_f + O(1).$$

□

Damit haben wir also eine Höhe, die gleichzeitig eine quadratische Form ist. Weiter bekommt die Bilinearform aus 3. einen Namen.

**Definition 3.5** Man nennt die Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{NT}: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\langle P, Q \rangle_{NT} = \frac{1}{2}(\hat{h}(P+Q) - \hat{h}(P) - \hat{h}(Q))$$

die Néron-Tate-Höhenpaarung.

Wir erweitern die Paarung auf Divisoren von  $E$ .

Sei  $S$  die Abbildung

$$S: \text{Div}(E) \rightarrow E, \quad \sum n_i P_i \mapsto \sum [n_i] P_i,$$

wobei die linke Summe die formale Summe in  $\text{Div}_0(E)$  und die rechte Summe die Gruppenoperation in  $E(K)$  ist.

**Definition 3.6** Dann definieren wir die Néron-Tate-Höhe

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{NT}: \text{Div}(E) \times \text{Div}(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\langle D, E \rangle_{NT} := \langle S(D), S(E) \rangle_{NT}.$$

Aus Satz 3.4 folgt

**Satz 3.7** Für die Néron-Tate-Höhe gilt

a) Die Paarung ist bilinear.

b) Ist  $D = (f)$  ein Hauptdivisor, so ist

$$\langle D, E \rangle_{NT} = 0 \text{ für alle } E \in \text{Div}(E)$$

c) Die Paarung ist symmetrisch.

□

### 3.2 „Klassische“ Arakelov-Theorie

In diesem Abschnitt folgen wir den Ideen von Arakelov, um eine Schnittpaarung auf alle Divisoren zu definieren. Die „klassische“ Arakelov-Theorie Arakelov-Theorie ist ein Spezialfall der Gillet-Soulé-Theorie und ihrer Verallgemeinerungen [Kü1]

Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche und  $C = \mathcal{C}_K$ . Für jedes  $\nu \in M_K^\infty$  haben wir eine Einbettung

$$\sigma_\nu : K \rightarrow \mathbb{C}$$

(sogar ein Paar von Einbettungen, falls  $\nu$  nicht reell ist), die die Bewertung  $\nu$  induziert.

**Definition 3.8** Ein Arakelov-Divisor ist ein Element aus  $\text{Div}_{Ar}(\mathcal{C})$ , wobei  $\text{Div}_{Ar}(\mathcal{C})$  gegeben ist durch die direkte Summe

$$\text{Div}_{Ar}(\mathcal{C}) = \text{Div}(\mathcal{C}) \oplus \bigoplus_{\nu \in M_K^\infty} (\mathcal{C}_\nu \otimes \mathbb{R}),$$

wobei  $\mathcal{C}_\nu = \mathcal{C}_{K,\nu}$  die Kurve über  $\mathbb{C}$  gegeben durch  $\sigma_\nu \mathcal{C}_K$ . Die möglichen Koeffizienten an archimedischen Bewertungen sind beliebige reelle Zahlen.

Um Divisoren Arakelov-Divisoren zuordnen zu können, benötigen wir Néron-Funktionen. Sei  $\nu \in M_K^\infty$  eine archimedische Bewertung.

**Definition 3.9** Eine Néron-Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Divisor  $D$  auf  $\mathcal{C}_\nu$  eine Funktion zuordnet

$$\lambda_{D,\nu} : \mathcal{C}_\nu(\mathbb{C}) - \text{Supp}(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

die die folgenden Eigenschaften besitzt

a)  $\lambda_{D,\nu}$  hängt additiv von  $D$  ab (nicht nur bis auf Konstanten).

b) Falls  $D = (f)$  der Divisor einer rationalen Funktion ist, so gilt

$$\lambda_{D,\nu} = -\log|f|_\nu + \text{Konstante.}$$

c) Für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathcal{C}_\nu(\mathbb{C})$  ist sie symmetrisch

$$\lambda_{P,\nu}(Q) = \lambda_{Q,\nu}(P).$$

d) Falls  $D$  auf einer offenen Menge  $U$  durch eine rationale Funktion  $f$  repräsentiert wird, dann existiert eine stetige Funktion  $\alpha$  auf  $U$ , sodass  $-\log|f|_\nu - \lambda_{D,\nu} = \alpha$  auf  $U$ .

Néron-Funktionen existieren. Man beachte aber, dass es keine eindeutige Familie von ihnen gibt.

Wir betrachten ab jetzt eine feste Familie von Néron-Funktionen. Sei  $f \in \mathbb{C}(\mathcal{C}_\nu)$  eine rationale Funktion auf  $\mathcal{C}_\nu$ . Sei  $D = (f)$ . Die Differenz

$$\gamma_\nu(f) = -\log|f|_\nu - \lambda_{(f),\nu}$$

ist konstant und hängt nur von  $f$  (und natürlich  $\nu$ ) ab.

Jetzt können wir den Arakelov-Divisor einer Funktion definieren.

**Definition 3.10** Für  $f \in K(\mathcal{C})$  definieren wir den Arakelov-Divisor von  $f$  als

$$(f)_{Ar} = (f)_{fin} + \sum_{\nu \in M_K^\infty} \gamma_\nu(f) \mathcal{C}_\nu,$$

wobei  $(f)_{fin}$  der normale Divisor von  $f$  auf dem Schema  $\mathcal{C}$  ist. Wir nennen  $(f)_{fin}$  den endlichen Anteil von  $(f)_{Ar}$ . Den zusätzlichen Teil  $(f)_\infty = (f)_{Ar} - (f)_{fin}$  nennen wir den unendlichen Anteil.

Man beachte, dass der Arakelov-Divisor von  $f$  abhängig ist von der Wahl der Familie von Néron-Funktionen.

Für den Rest dieses Abschnittes beschäftigen wir uns mit Arakelov-Divisoren. Deshalb kürzen wir ab und schreiben

$$(f) = (f)_{Ar}.$$

Benötigen wir noch mal den Divisor auf  $\mathcal{C}$  so schreiben wir  $(f)_{alg}$  oder  $(f)_{\mathcal{C}}$ .

**Definition 3.11** Sei  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  ein horizontaler Primdivisor auf  $\mathcal{C}$ . Wir definieren den  $K$ -Grad von  $D$  als

$$\deg_K(D) = [K(D) : K],$$

wobei

$$K(D) = \bigcap_{L|D \in \text{Div}(\mathcal{C}(L))} L.$$

Für einen vertikalen Divisor  $F$  definieren wir

$$\deg_K(F) = 0.$$

**Definition 3.12** Sei  $D = \sum n_i D_i$  ein Divisor. Der Träger von  $D$  ist definiert als

$$\text{Supp } D = \bigcup_{n_i \neq 0} D_i \subset \mathcal{C}.$$

Sei  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  ein horizontaler Primdivisor auf  $\mathcal{C}$ . Der Divisor  $D_K = D \cap \mathcal{C}_K \in \text{Div}(\mathcal{C})$  zerfällt in  $\mathcal{C}_\nu$  in  $m = \deg_K(D)$  verschiedene geometrische Punkte

$$D_\nu = D_{K,\nu} = \sum P_i.$$

**Definition 3.13** Für einen Primdivisor  $D \in \text{Div}(\mathcal{C})$  definieren wir den Arakelov-Divisor  $D_{Ar}$  als

$$D_{Ar} = D + \sum_{\nu \in M_K^\infty} D_\nu.$$

Wir nennen  $D_{alg}$  den endlichen Anteil von  $D_{Ar}$ . Den zusätzlichen Teil  $D_\infty = D_{Ar} - D_{alg}$  nennen wir den unendlichen Anteil.

Für allgemeine Divisoren  $D = \sum n_i D_i \in \text{Div}(\mathcal{C})$  definieren wir den Arakelov-Divisor  $D_{Ar}$  als

$$D_{Ar} = \sum n_i (D_i)_{Ar}$$

mit

$$D_{alg} = \sum n_i D_i \text{ und } D_\infty = \sum n_i (D_i)_\infty.$$

Wieder kürzen wir ab und schreiben

$$D = D_{Ar}.$$

Benötigen wir noch mal den Divisor auf  $\mathcal{C}$  so schreiben wir  $D_{alg}$  oder  $D_{\mathcal{C}}$ .

Wir erweitern die Néron-Funktion  $\lambda_\nu$  bilinear auf beliebigen Divisoren mit disjunkten Träger über  $\mathbb{C}$  und definieren die Schnittzahl

**Definition 3.14** Seien  $D, E \in \text{Div}(\mathcal{C})$  zwei Divisoren mit Zerlegungen

$$D_\nu = \sum P_i \text{ und } E_\nu = \sum Q_i.$$

Wir definieren die Schnittzahl in  $\mathcal{C}_\nu$  als

$$(D \cdot E)_\nu = \lambda_\nu(D_\nu, E_\nu) = \sum_{i,j} \lambda_\nu(P_i, Q_j).$$

Damit definieren wir die unendliche Schnittzahl als

$$(D \cdot E)_\infty = \sum_{\nu \in M_\infty} (D \cdot E)_\nu.$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_\nu \cdot D) &= \deg_K(D), \text{ für jeden Divisor } D \in \text{Div}(\mathcal{C}) \\ (\mathcal{C}_\nu \cdot \mathcal{C}_{\nu'}) &= 0, \text{ für alle } \nu, \nu' \in M_K. \end{aligned}$$

Wir haben Arakelov-Divisoren und die unendliche Schnittzahl definiert. Jetzt müssen wir noch die endliche Schnittzahl definieren. Dafür sei  $\nu \in M_K^0$  und

$$\nu(z) = (\text{ord}_\nu z) \log N_\nu.$$

**Definition 3.15** Seien  $D, E \in \text{Div}(\mathcal{C})$  zwei Divisoren ohne gemeinsame Komponenten. Wir definieren für  $x \in D \cap E \cap \mathcal{C}_\nu$

$$(D \cdot E)_x = i_x(D, E) \log N_\nu.$$

Weiter definieren wir

$$(D \cdot E)_\nu = \sum_{x \in D \cap E \cap \mathcal{C}_\nu} i_x(D, E) \log N_\nu$$

und

$$(D \cdot E)_{\text{alg}} = \sum_{\nu \in M_K^0} (D \cdot E)_\nu.$$

Damit können wir ein Arakelov-Schnittzahl definieren.

**Definition 3.16** Wir definieren die Arakelov-Schnittpaarung

$$(\cdot) : \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C}) \times \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$(D \cdot E) = (D_{\text{alg}} \cdot E_{\text{fin}})_{\text{alg}} + (D \cdot E)_\infty.$$

**Satz 3.17** Sei  $\mathcal{C}/R$  eine arithmetische Fläche. Die Arakelov-Schnittpaarung

$$(\cdot) : \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C}) \times \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}$$

erfüllt die folgenden Eigenschaften.

a) Falls  $D_1, D_2, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C})$  Arakelov-Divisoren sind mit  $D_1 \simeq D_2$ . Dann gilt

$$(D_1 \cdot E) = (D_2 \cdot E).$$

Insbesondere gilt:

$$(\text{div}(f) \cdot E) = 0 \text{ für alle } f \in K(\mathcal{C})^* \text{ und alle } E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C}).$$

b) Falls  $D, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{C})$  Divisoren sind, dann gilt

$$D \cdot E = E \cdot D.$$

□

Die Arakelov-Schnittpaarung ist also symmetrisch und invariant unter linearer Äquivalenz.

Als nächstes wollen wir die Schnittzahl von  $\text{Div}_{Ar}(C)$  auf Divisoren der generischen Faser zurückziehen. Damit wir das können, benötigen wir die Funktion  $\Phi$ , die die Schnittzahl unabhängig von der betrachteten arithmetischen Fläche macht. Dafür müssen wir uns leider auf Divisoren von Grad 0 beschränken.

Für den nächsten Satz benötigen wir den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum erzeugt von den vertikalen Divisoren einer speziellen Faser  $\mathcal{C}_\nu$ , also

$$\text{Div}_\nu(C) \otimes \mathbb{Q}$$

außerdem sei

$$\mathcal{C}_\nu \otimes \mathbb{Q}$$

der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, der von der gesamten Faser  $\mathcal{C}_\nu$  erzeugt wird.

**Satz 3.18** (siehe [Hr] Theorem 1.3) Für jedes  $\nu \in M_K^0$  existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\Phi_\nu : \text{Div}_0(C) \rightarrow (\text{Div}_\nu(C) \otimes \mathbb{Q}) / (\mathcal{C}_\nu \otimes \mathbb{Q}),$$

sodass für alle  $D \in \text{Div}_0(C)$  der Divisor  $\bar{D} + \Phi_\nu(D)$  orthogonal zu  $\text{Div}_\nu(C)$  ist.

□

**Definition 3.19** Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : \text{Div}_0(C) \rightarrow \bigoplus_{\nu \in M_K^0} (\text{Div}_\nu(C) \otimes \mathbb{Q}) / (\mathcal{C}_\nu \otimes \mathbb{Q})$$

durch

$$\Phi(D) = \sum_{\nu \in M_K^0} \Phi_\nu(D).$$

Jetzt können wir eine Schnittpaarung auf  $\text{Div}_0(C)$  definieren.

**Definition 3.20** Wir definieren die Arakelov-Schnittpaarung

$$(\cdot) : \text{Div}_0(C) \times \text{Div}_0(C) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$(D \cdot E) = ((\bar{D} + \Phi(D))_{Ar} \cdot (\bar{E} + \Phi(D))_{Ar}) = ((\bar{D} + \Phi(D))_{Ar} \cdot (\bar{E})_{Ar}).$$

**Bemerkung 3.21** Die Schnittpaarung ist unabhängig von dem Modell, auf denen man die Schnittzahlen berechnet.



### 3.3 Der Zusammenhang zwischen Arakelov-Schnittzahl und der kanonischen Höhe

Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $\mathcal{E}/R$  das minimale, reguläre, eigentliche Modell von  $E$ . Auf der Gruppe  $\text{Div}_0(E)$  sind zwei verschiedene Paarungen definiert. Zum einen die Néron-Tate-Paarung und zum anderen die Arakelov-Schnittpaarung.

Diese beiden Paarungen haben ganz unterschiedlichen Ursprung und daher ist das folgende Ergebnis von Faltings und Hriljac nicht offensichtlich.

**Satz 3.22** *Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $D_1, D_2 \in \text{Div}_0(C)$  zwei Divisoren vom Grad Null. Dann gilt*

$$(D_1 \cdot D_2) = - \langle D_1, D_2 \rangle_{NT} .$$

□

Wir wollen dieses Ergebnis in dieser Arbeit dazu benutzen, die Néron-Tate-Höhe für bestimmte Divisoren auf einer gegebenen Kurve mittels der Arakelov-Schnittzahl zu berechnen.

Es sei darauf hingewiesen, dass das Originalergebnis von Faltings und Hriljac viel allgemeiner ist und sich nicht nur auf elliptische Kurven beschränkt. Aus Gründen der Vollständigkeit wollen wir das Originalergebnis hier kurz formulieren, können aber aus Platzgründen nicht auf die gebrauchten Notationen eingehen.

**Satz 3.23** *(siehe [Hr] Theorem 3.1) Sei  $\mathcal{C}$  eine arithmetische Fläche. Sei  $\psi : \mathcal{C}_K \rightarrow J$  die kanonische Abbildung der generischen Faser  $\mathcal{C}_K$  in ihre Jacobische. Sei  $\Theta$  die Thetadivisorenklasse und  $c = \Theta + \Theta^-$ . Sei  $D \in \text{Div}_0(\mathcal{C}_K)$  und sei  $h_c$  die kanonische Höhe. Dann gilt*

$$\langle D, D \rangle = h_\delta(S(D), S(D)) = -h_c(S(D)),$$

wobei  $\delta$  die Poincaré Divisorenklasse auf  $J$  ist und  $S = S_\psi$  die gewöhnliche Summationsabbildung  $\text{Div}_0(\mathcal{C}_K) \rightarrow J$  ist.

□

### 3.4 Kühns Formel zur Berechnung der Néron-Tate-Höhe

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben gibt es eine enge Beziehung zwischen der Néron-Tate-Höhe und der Arakelov-Schnittpaarung. Diese Beziehung ist bis jetzt aber noch nicht konstruktiv, da die Gestalt des unendlichen Anteils von den noch nicht konkretisierten Néron-Funktionen abhängt.

Ulf Kühn [Kü2] hat sich damit beschäftigt, wie man die Arakelov-Schnittzahlen konstruktiv bestimmen kann. Er verbindet die Arakelov-Theorie mit einem Theorem von

Belyi und findet heraus, dass der unendliche Anteil der Arakelov-Schnittzahl für Divisoren von Grad Null auf algebraischen Kurven über Zahlkörpern gegeben ist durch eine lineare Kombinationen von Streukonstanten.

Da wir Arakelov-Theorie bereits im letzten Kapitel behandelt haben, kommen wir also zu Belyis Satz, der eine überraschende Aussage über die Anzahl von kritischen Werten in bestimmten Morphismen trifft. Wir benötigen vorher noch einige Definitionen.

Sei  $C$  eine algebraische Kurve über  $\mathbb{C}$  und  $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine endliche Überlagerung, das heißt, jeder Punkt des  $\mathbb{P}^1$  hat nur endlich viele Urbilder. Die Anzahl der Urbilder ist fast überall gleich, aber es kann endlich viele Punkte in  $\mathbb{P}^1$  geben, an denen  $\psi$  weniger Urbilder hat.

**Definition 3.24** Sei  $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine endliche Überlagerung. Die Punkte, die nicht die maximale Anzahl an Urbildern haben, werden als kritische Werte bezeichnet.

**Definition 3.25** Sei  $\mathbb{H} = \{\tau = x + iy \mid y > 0\} \subset \mathbb{C}$  die komplexe obere Halbebene. Sei  $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$  die Modulgruppe und  $\Gamma \subset \Gamma(1)$  eine Untergruppe vom endlichen Index. Die Gruppe  $\Gamma$  wirkt auf  $\mathbb{H}$  per Möbius-Transformation. Die offene Riemannsche Fläche  $Y(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  kann man kompaktifizieren, indem man eine endliche Menge von Spitzen hinzufügt. Die resultierende kompakte Riemannsche Fläche bezeichnen wir mit  $X(\Gamma)$  und nennen sie eine allgemeine Modulkurve.

**Satz 3.26** (Satz von Belyi, siehe [Se]) Sei  $C$  eine algebraische Kurve. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- a) Die Kurve  $C$  ist über einem Zahlkörper  $K$  definiert.
- b) Es gibt einen über  $K$  definierten Morphismus  $\beta : C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ , der höchstens die drei kritische Werte  $0, 1$  und  $\infty$  hat.
- c) Es gibt eine Untergruppe  $\Gamma$  von  $\Gamma(1)$  von endlichen Index, sodass  $C \cong X(\Gamma)$ .

□

**Beispiel 3.27** Sei  $E$  eine elliptische Kurve. Man kann die Projektion auf die x-Achse zu einem Morphismus nach  $\mathbb{P}^1$  erweitern. Dieser Morphismus besitzt immer 4 kritische Werte. Ist aber die Kurve über  $\overline{\mathbb{Q}}$  definiert, so sagt der Satz von Belyi, dass es auch einen Morphismus mit höchstens drei kritischen Werten gibt.

**Definition 3.28** Ein Morphismus mit den Eigenschaften aus Satz 3.26b heißt Belyi-Morphismus. Das Paar  $(C, \beta)$  bestehend aus der Kurve  $C$  und dem Morphismus  $\beta$ , heißt Belyi-Paar. Der Isomorphismus aus Satz 3.26c heißt Belyi-Uniformisierung.

**Definition 3.29** Sei  $(C, \beta)$  ein Belyi-Paar.

Ein Punkt  $P \in C$  heißt Spitze, falls  $P$  Urbild eines kritischen Wertes ist.

**Definition 3.30** Ein Divisor  $D$  auf  $C/K$  heißt Spitzendivisor, falls er vom Grad Null ist und der Träger in der Menge der Spitzen enthalten ist. Die Gruppe der Spitzendivisoren nennen wir  $\text{Cusp}(C/K, \beta)$ .

**Bemerkung 3.31** Sei  $E$  ein beliebiger Divisor von Grad Null. So gibt es immer einen nicht eindeutig bestimmten Belyi-Morphismus, sodass  $E$  ein Spitzendivisor ist.

Jedem Paar  $(C, \beta)$  können wir jetzt nach Belyi eine Untergruppe von endlichen Index der Modulgruppe  $\Gamma(1)$  zuordnen.

**Bemerkung 3.32** Die Tatsache, dass man jedem Belyi-Paar eine Untergruppe von  $\Gamma(1)$  zuordnen kann, basiert darauf, dass  $\Gamma(2) \subset \Gamma(1)$  eigentlich und frei auf  $\mathbb{H}$  wirkt, sowie

$$\Gamma(2) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{3 \text{ Punkte}\}.$$

Belyi gibt für den Morphismus eine explizite Konstruktion an, doch ist diese Konstruktion schwer durchzuführen. Sie erfordert die Berechnung von Minimalpolynomen und Nullstellen von Polynomen hohen Grades.

Wie man konstruktiv jedem Paar eine Untergruppe zuordnen kann wird zum Beispiel bei B. Birch [Bi] beschrieben. Für elliptische Kurven gibt es für Belyi-Morphismen konkrete Konstruktionen von L. Khadjavi und V. Scharaschkin in [KS].

Wir betrachten jetzt zu einer Untergruppe  $\Gamma \subset \Gamma(2)$  nichtholomorphe Eisensteinreihen. Zu jeder Spitze, eine Äquivalenzklasse von  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$  unter der Wirkung von  $\Gamma$ , gibt es eine Eisensteinreihe. Die Streumatrix zu  $\Gamma$  ist durch die konstanten Koeffizienten der Eisensteinreihe zu verschiedenen Spitzen definiert. Die Arakelov-Theorie liefert die Zusammenhänge zwischen den Streumatrizen und der Arithmetik von algebraischen Kurven.

Sei  $\mathcal{S} = \{S_1 = \infty, \dots, S_h\}$  ein Repräsentantensystem für die Spitzen in  $X(\Gamma)$ . Für jedes  $S_j \in \mathcal{S}$  sei  $\Gamma_j$  der Stabilisator in  $\Gamma$ . Wir fixieren ein Element  $\sigma_j \in PSL_2(\mathbb{R})$ <sup>10</sup> sodass  $\sigma_j(\infty) = S_j$  und

$$\sigma_j^{-1} \Gamma_j \sigma_j = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & m \\ 0 & 1 \end{array} \right) \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die skalierende Matrix  $\sigma_j$  hat die Form

$$\sigma_j = \left\{ \gamma_j \left( \begin{array}{cc} \sqrt{b_j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{b_j}} \end{array} \right) \mid \text{mit } \gamma_j \in \Gamma(1) \text{ und } b_j \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definition 3.33** Zu jeder Spitze  $S_j$  ist die nichtholomorphe Eisensteinreihe  $E_j(\tau; s)$ , mit  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) > 1$ , definiert ist durch die konvergente Reihe

$$E_j(\tau; s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_j \backslash \Gamma} \text{Im}(\sigma_j^{-1} \sigma(\tau))^s.$$

<sup>10</sup>  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$

Ohne genauer auf die Definition einzugehen (vgl. [Kü2]) gibt es jetzt eine Streumatrix  $\Phi_\Gamma(s)$ . Der Eintrag  $(\Phi_\Gamma)_{jk}(s)$  kommt von der Fourierentwicklung der Eisensteinreihe zu  $S_j$  in  $S_k$  und sind in einem allgemeinem Sinne Dirichletreihen. Wir wollen hier aus Platzgründen nicht näher auf die Definition eingehen, sondern kommen direkt zu der Definition der Streukonstanten.

**Definition 3.34** Die Streukonstanten  $C_{jk}$  für  $\Gamma$  sind die konstanten Terme der Dirichletreihen  $(\Phi_\Gamma)_{jk}(s)$  in 1. Sie sind durch die folgenden reellen Zahlen gegeben

$$C_{jk} := \lim_{s \rightarrow 1} \left( \frac{\pi^{1/2}}{(b_j b_k)^s} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \sum_{c>0} \left( r_{jk}(c) \frac{1}{c^{2s}} \right) - \frac{3/(\pi \cdot [\Gamma(1) : \Gamma])}{s-1} \right); \quad (2)$$

$$\text{wobei } r_{jk}(c) = \# \left\{ d \pmod{b_k c} \mid \exists \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \gamma_j^{-1} \Gamma \gamma_k \right\}.$$

Es ist zu beachten, dass das  $\Gamma$  in der Formel zwei unterschiedliche Bedeutungen besitzt. In  $\Gamma(s-1/2)$  und  $\Gamma(s)$  bezeichnet es die Gamma-Funktion und ansonsten die Gruppen  $\Gamma$  und  $\Gamma(1)$ .

Die Vereinigung der Menge der Streukonstanten für  $\Gamma$ , wenn  $\Gamma$  alle Untergruppen von endlichen Index von  $\Gamma(1)$  durchläuft, ist eine abzählbare Untermenge von  $\mathbb{R}$ .

**Definition 3.35** Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}_\beta$  die Menge aller  $\nu \in M_K^0$  in denen  $C$  schlechte Reduktion besitzt.

**Definition 3.36** Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}_C$  die Menge aller  $\nu \in M_K^0$  für die es zwei verschiedene Spitzen  $S_j$  und  $S_k$  gibt, sodass

$$\overline{S}_j \cap \mathcal{C}_\nu = \overline{S}_k \cap \mathcal{C}_\nu.$$

Zusammen mit dem Satz von Faltings-Hriljac 3.23 mit der Erweiterung der Arakelov-Theorie gegeben in [Kü1] ergibt sich in [Kü2] folgender Satz.

**Satz 3.37** (siehe [Kü2]) Sei  $C/K$  eine geometrisch irreduzible Kurve.

Seien  $D_1 = \sum_j n_j S_j$ ,  $D_2 = \sum_k m_k S_k$  zwei Divisoren auf  $C$  vom Grad 0. Man wähle einen Belyi-Morphismus  $\beta : C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ , sodass  $D_1$  und  $D_2$  Spitzendivisoren auf  $C$  sind. Weiter sei  $C_\sigma(\mathbb{C}) \cong X(\Gamma_\sigma)$  die induzierte Belyi-Uniformisierung. Dann existiert die folgende Formel für die Néron-Tate-Höhenpaarung  $\langle D_1, D_2 \rangle_{NT}$  für Divisoren  $D_1, D_2 \in \text{Div}_0(C)$

$$-\langle D_1, D_2 \rangle_{NT} = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_\beta \cup \mathcal{P}_C} \delta_\nu \log N_\nu + \frac{2\pi}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \sum_{j,k} n_j m_k C_{jk}^\sigma \right),$$

wobei die  $\delta_\nu$  rationale und die  $C_{jk}^\sigma$  reelle Zahlen sind. Die  $C_{jk}^\sigma$  sind die Streukonstanten der Gruppen  $\Gamma_\sigma$ .

□

Ist ein reguläres Modell von  $C$  explizit bekannt, so können die rationalen Zahlen  $\delta_\nu$  konkret berechnet werden. Dies ist der Kern dieser Diplomarbeit und die Theorie dafür findet sich in den Kapiteln 1 und 2.

**Bemerkung 3.38** Sei  $E/K$  eine elliptische Kurve und  $\beta$  eine Belyi-Uniformisierung. Seien  $D_1, D_2 \in \text{Div}_0(C)$  Spitzendivisoren. Dann ist gerade

$$(D_1, D_2)_{alg} = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_\beta \cup \mathcal{P}_C} \delta_\nu \log N_\nu$$

und

$$(D_1, D_2)_\infty = \frac{2\pi}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}} \sum_{j,k} n_j m_k C_{jk}^\sigma \right).$$

In dem nächsten Kapitel werden wir anhand einer konkreten Kurve diese Theorie anwenden und die rationalen Zahlen  $\delta_p$  berechnen.

## 4 Schnitzzahlenberechnung zur Kurve 400H1

Wir betrachten in diesem Abschnitt das minimale Modell  $\mathcal{E}$  der elliptischen Kurve

$$E : y^2 = x^3 + 5x + 10 \tag{3}$$

und berechnen darauf die lokalen Schnitzzahlen der horizontaler Divisoren  $D_0, D_1, D_3, D_6, D_\infty$ , die durch die Zariski-Abschlüsse der Punkte

$$S_0 = (1, 4), S_1 = (6, 16), S_3 = (1, -4), S_6 = (6, -16) \text{ und } S_\infty = o = [0 : 1 : 0]$$

gegeben sind. Dabei ist  $o$  der ausgezeichnete unendlich ferne Punkt.

### 4.1 Bestimmung des minimalen Modells für 400H1

Die durch (3) bestimmte elliptische Kurve hat in Cremona's Liste [Cr] die Bezeichnung 400H1. Man berechnte (siehe 2.1)

$$\Delta_E = -51200 = -2^{11} \cdot 5^2$$

Die Fasern schlechter Reduktion liegen also über (2) und (5). Aus der Tabelle von Cremona sehen wir, dass die Faser über (2) vom Typ  $I_3^*$ , während die Faser über (5) vom Typ  $II$  ist (vgl. Abbildung 7 auf Seite 46).

Schauen wir uns einmal die Fasern des Weierstraßmodelles  $W$  von  $E$

$$W = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 5x - 10)$$

an. Abbildung 8 auf Seite 62 zeigt die Fasern von  $W$  und man sieht, dass die Faser über (5) bereits vom Typ  $II$  ist. Das minimale, reguläre, eigentliche Modell unterscheidet sich also ausschließlich in der Faser über (2) vom Weierstraßmodell.

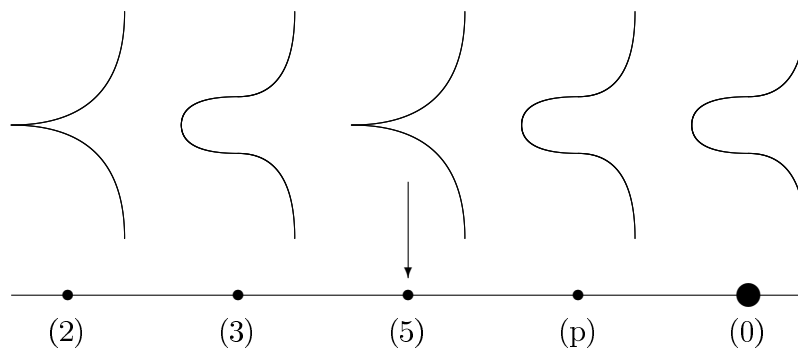


Abbildung 8: Die Fasern des Weierstraßmodelles der Kurve 400H1

Zur Berechnung der lokalen Schnittzahlen  $(D_i, D_j)_x$  benötigen wir die Kenntnis welche Komponente von  $D_i$  bzw.  $D_j$  getroffen wird.

Dazu reicht die Information über den Typ der Faser über (2) nicht aus<sup>11</sup> und darum berechnen wir nun das minimale Modell  $\mathcal{E}$  von  $E$ .

Zuerst verschieben wir  $E$  linear, sodass alle Aufblasungen, die wir für  $p = 2$  machen müssen, durch den „Nullpunkt“ gehen. Dafür führen wir eine zulässige Variablentransformation durch.

$$x \mapsto x + 1 \text{ und } y \mapsto y + x + 4, \quad (4)$$

und erhalten so

$$W_0 : y^2 + 2xy + 8y = x^3 + 2x^2.$$

Diese Veränderung dient nur dazu, damit unsere Aufblasungen einfacher werden. Konstruktiv bekommt man sie, indem man die entsprechenden Aufblasungen vornimmt und die Kurve immer so verschiebt, dass das aufzublasende Unterschema in der entsprechenden Karte durch den „Nullpunkt“ geht. Jetzt sind wir bereit die Aufblasungen vorzunehmen.

Man sieht, dass der Punkt  $P_3 = V((x, y, 2))$  nach Satz 1.16 nichtregulär ist, da  $y^2 + 2xy + 8y - x^3 - 2x^2 \in (x, y, 2)^2$ . Die Karte  $W_0$  sieht man in Abbildung 9.

Deshalb blasen wir  $W_0$  entlang dem Punkt  $P_3 = V((x, y, 2))$  auf.

Aufblasen funktioniert nun wie wir in den Beispielen 1.31 und 1.32 gesehen haben.

Man muss drei Karten beachten.

<sup>11</sup>Alle anderen Fasern enthalten nur eine Komponente, sodass diese notwendiger Weise von den  $D_i$  getroffen wird

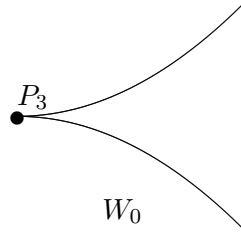


Abbildung 9: Die Karte  $W_0$

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$x = 2x_1 \text{ und } y = 2y_1,$$

und erhalten

$$4y_1^2 + 8x_1y_1 + 16y_1 = 8x_1^3 + 8x_1^2.$$

Jetzt kürzen wir 4 und kommen zu unser Karte  $W_1$

$$W_1 : y_1^2 + 2x_1y_1 + 4y_1 = 2x_1^3 + 2x_1^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$y_1^2 = 0.$$

Es gibt die Komponente

$$\mathcal{C}_3 = \{y_1 = 0\},$$

die mit der Vielfachheit 2 auftritt.

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $x$ , also

$$2 = x'\pi', \quad x = x' \text{ und } y = x'y',$$

und erhalten

$$x'^2y'^2 + \pi'x'^3y' + \pi'^3x'^4y' = x'^3 + \pi'x'^3.$$

Jetzt kürzen wir  $x'^2$  und kommen zu unser Karte  $W'_1$

$$W'_1 : y'^2 + \pi'x'y' + \pi'^3x'^2y' = x' + \pi'x'.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $x' = 0$ , und erhält

$$y'^2 = x', \quad \pi' = 0 \text{ und } y'^2 = 0, \quad x' = 0.$$

Es gibt die Komponenten

$$\mathcal{C}'_1 = \{y'^2 = x', \pi' = 0\}, \text{ und } \mathcal{C}'_3 = \{y' = 0, x' = 0\},$$

wobei hier die Komponente  $\mathcal{C}'_3$  mit der Vielfachheit 2 auftritt.

**Karte 3:** In der dritten Karte dividieren wir durch  $y$ , also

$$2 = y''\pi'', \quad x = x''y'' \quad \text{und} \quad y = y'',$$

und erhalten

$$y''^2 + \pi''x''y''^3 + \pi''^3y''^4 = x''^3y''^3 + \pi''x''^2y''^3.$$

Jetzt kürzen wir  $y''^2$  und kommen zu unser Karte  $W_1''$

$$W_1'' : 1 + \pi''x''y'' + \pi''^3y''^2 = x''^3y'' + \pi''x''^2y''.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi'' = 0$  oder  $y'' = 0$ , und erhält

$$1 = y''x''^3, \quad \pi'' = 0 \quad \text{und} \quad 1 = 0, \quad y'' = 0.$$

Das zweite geht natürlich nicht und so gibt es nur die Komponente

$$C_1'' = \{1 = y''x''^3, \pi'' = 0\}.$$

Zwischen diesen Karten gibt es Abbildungen, die die Komponenten ineinander umwandeln. Wir betrachten die Abbildungen  $\phi_{12}$  von Karte 1 nach Karte 2 und  $\phi_{32}$  von Karte 3 nach Karte 2.

$\phi_{12} : \mathbf{Karte 1} \rightarrow \mathbf{Karte 2}$ . Die Abbildung  $\phi_{12}$  ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \phi_{12}(x_1) &= \frac{x}{2} = \frac{1}{\pi'}, \quad \phi_{12}(y_1) = \frac{y}{2} = \frac{y'}{\pi'}, \\ \phi_{12}(2) &= 2 = x'\pi'. \end{aligned}$$

Durch  $\phi_{12}$  wird eine Abbildung  $\Phi_{12}$  aus der Menge der Komponenten von Karte 1 in die Potenzmenge der Menge der Komponenten von Karte 2 induziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(C_3) &= \Phi_{12}(\{y_1 = 0\}) = \left\{ \frac{y'}{\pi'} = 0 \right\} \\ &= \{y' = 0, x' = 0\} = \{C_3'\}. \end{aligned}$$

Beim Verkleben der Karten 1 und 2 verklebt man die Komponente  $C_3$  der ersten Karte mit der Komponente  $C_3'$  der zweiten Karte. Dagegen ist die Komponente  $C_1'$  der zweiten Karte nicht in der ersten Karte enthalten.

$\phi_{32} : \mathbf{Karte 3} \rightarrow \mathbf{Karte 2}$ . Die Abbildung  $\phi_{32}$  ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} \phi_{32}(x'') &= \frac{x}{y} = \frac{1}{y'}, \quad \phi_{32}(y'') = y = x'y', \\ \phi_{32}(\pi'') &= \frac{2}{y} = \frac{\pi'x'}{x'y'} = \frac{\pi'}{y'}. \end{aligned}$$



Durch  $\phi_{32}$  wird wieder eine Abbildung  $\Phi_{32}$  aus der Menge der Komponenten von Karte 3 in die Potenzmenge der Menge der Komponenten von Karte 2 induziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi_{32}(C_1'') &= \Phi_{32}(\{1 = x''^3 y'', \pi'' = 0\}) = \left\{1 = \frac{1}{y'^3} x' y', \frac{\pi'}{y'} = 0\right\} \\ &= \{y'^2 = x', \pi' = 0\} = \{C_1''\}.\end{aligned}$$

Beim Verkleben der Karte 2 und 3 verklebt man die Komponente  $C_1'$  der zweiten Karte mit der Komponente  $C_1''$  der dritten Karte. Dagegen ist die Komponente  $C_3'$  der zweiten Karte nicht in der dritten Karte enthalten.

Zur Vereinfachung nennen wir die Komponenten der Aufblasung  $C_1$  und  $C_3$ , wobei der Teil von  $C_1$  in der dritten Karte gerade  $C_1''$  ist und der Teil von  $C_1$  in der zweiten Karte gerade  $C_1'$ . Analog für die Komponente  $C_3$ .

Sucht man jetzt nach nichtregulären Punkten, so sieht man, dass als einziger Punkt auf der Komponente  $C_1$  der Schnittpunkt mit  $C_3$  nichtregulär sein muss, da eine Aufblasung außerhalb des Zentrums ein Isomorphismus ist.

Wir müssen uns nur die Punkte der Komponente  $C_3$  anschauen. Dafür müssen wir wieder in die Karten gehen. In der ersten Karte betrachtet man die lokalen Ringe für den Punkt  $P_a = V((p_a(x_1), y_1, 2))$ , wobei  $p_a(x_1)$  ein modulo 2 irreduzibles Polynom ist.

$$\begin{aligned}O_{W_1, P_a} &= (\mathbb{Z}[x_1, y_1]/(y_1^2 + 2x_1 y_1 + 4y_1 - 2x_1^3 - 2x_1^2))_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x_1, y_1]_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle} / (y_1^2 + 2x_1 y_1 + 4y_1 - 2x_1^2(x_1 + 1)).\end{aligned}$$

Der Ring  $\mathbb{Z}[x_1, y_1]_{\langle (y_1, 2, p_a(x_1)) \rangle}$  ist ein lokaler, regulärer, Noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = (y_1, 2, p_a(x_1))$  und  $f = (y_1^2 + 2x_1 y_1 + 4y_1 - 2x_1^2(x_1 + 1)) \in \mathfrak{m}$ . Nach Satz 1.16 ist  $O_{W_0, P_a}$  genau dann regulär, wenn  $f \notin \mathfrak{m}^2$ . Wie man sieht, ist das genau der Fall, wenn  $p_a(x_1) \neq x_1$  und  $p_a(x_1) \neq x_1 + 1$ .

Also gibt es zwei nichtreguläre Punkte in Karte 1

$$P_2 = V((x_1 + 1, y_1, 2)) \text{ und } P_4 = V((x_1, y_1, 2)).$$

In der zweiten Karte betrachten wir die Punkte  $P_a = V((x', y', p_a(\pi')))$ , wobei  $p_a(\pi')$  ein modulo 2 irreduzibles Polynom ist. Es gilt

$$\begin{aligned}O_{W_1', P_a} &= (\mathbb{Z}[x', y', \pi']/(y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^3 x'^2 y' - x' - \pi' x'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle} \\ &= (\mathbb{Z}[x', y', \pi']/(2 = \pi' y'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle} / (y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^3 x'^2 y' - x'(1 + \pi')).\end{aligned}$$

Der Ring  $(\mathbb{Z}[x', y', \pi']/(2 = \pi' y'))_{\langle (x', y', p_a(\pi')) \rangle}$  ist ein lokaler, regulärer, Noetherscher Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m} = (x', y', p_a(\pi'))$  und  $f = (y'^2 + \pi' x' y' + \pi'^3 x'^2 y' - x'(1 + \pi')) \in \mathfrak{m}$ . Nach Satz 1.16 ist  $O_{W_0', P_a}$  genau dann regulär, wenn  $f \notin \mathfrak{m}^2$ . Wie man sieht, ist das genau der Fall, wenn  $p_a(\pi') \neq \pi' + 1$ .

Also ist der einzige nichtreguläre Punkt in Karte 2 der Punkt

$$P'_2 = V((x', y', \pi' + 1)).$$

Mit Hilfe von  $\phi_{12}$  sehen wir

$$\phi_{12}(P_2) = \phi_{12}(V((x_1 + 1, y_1, 2))) = V\left(\left(\frac{1}{\pi'} + 1, \frac{y'}{\pi'}, x'\pi'\right)\right) = V((x', y', 1 + \pi')) = P'_2.$$

Nach der ersten Aufblasung hat die Faser über 2 eine Gestalt, entsprechend der Abbildung 10 auf Seite 66.

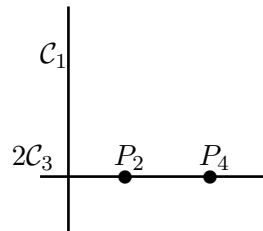


Abbildung 10: Die Aufblasung der Karte  $W_0$

Die Aufblasung enthält wie wir gesehen haben noch zwei nichtreguläre Punkte. Satz 1.29 erlaubt uns nun anstatt diese zwei Punkte einzeln die ganze Faser  $C_3$  in Karte 1 aufzublasen.

In diesem Schritt blasen wir die Karte  $W_1$

$$W_1 : y_1^2 + 2x_1y_1 + 4y_1 = 2x_1^3 + 2x_1^2,$$

entlang des Unterschemas  $C_3 = V((y_1, 2))$  auf.

Diesmal benötigen wir nur zwei Karten.

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$y_1 = 2y_2,$$

und erhalten

$$4y_2^2 + 4x_1y_2 + 8y_2 = 2x_1^3 + 2x_1^2.$$

Jetzt kürzen wir 2 und kommen zu unserer Karte  $W_2$

$$W_2 : 2y_2^2 + 2x_1y_2 + 4y_2 = x_1^3 + x_1^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$x_1^3 + x_1^2 = 0.$$

Es gibt die Komponenten

$$C_2 = \{x_1 + 1 = 0\} \text{ und } C_4 = \{x_1 = 0\},$$

wobei die Komponente  $C_4$  die Vielfachheit 2 besitzt.

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $y_1$ , also

$$2 = y'\pi', \quad x_1 = x' \text{ und } y_1 = y',$$

und erhalten

$$y'^2 + \pi'x'y'^3 + \pi'^2y'^3 = \pi'x'^3y' + \pi'x'^2y'.$$

Jetzt kürzen wir  $y'$  und kommen zu unser Karte  $W'_2$

$$W'_2 : y' + \pi'x'y'^2 + \pi'^2y'^2 = \pi'x'^3 + \pi'x'^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $y' = 0$ , und erhält

$$y' = 0, \quad \pi' = 0 \text{ und}$$

$$0 = \pi'x'^2(x' + 1), \quad y' = 0.$$

Es gibt die Komponenten

$$C'_2 = \{x' + 1 = 0, y' = 0\}, \quad C'_3 = \{\pi' = 0, y' = 0\} \text{ und } C'_4 = \{x' = 0, y' = 0\},$$

wobei hier die Komponenten  $C'_3$  und  $C'_4$  mit der Vielfachheit 2 auftreten.

Jetzt kann man wieder zeigen, dass beim Verkleben sowohl  $C_2$  und  $C'_2$ , als auch  $C_4$  und  $C'_4$  zusammengeklebt werden.

Weiter findet man wie oben heraus, dass der einzige nichtreguläre Punkt, der Punkt  $P_5$ , mit  $P_5 = V((x, y, 2))$  in Karte 1 ist.

Die Aufblasung der Karte  $W_1$  sieht man in Abbildung 11.

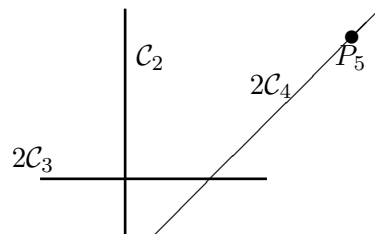


Abbildung 11: Die Aufblasung der Karte  $W_1$

Die folgenden Aufblasungen laufen ganz analog, deswegen verkürzen wir noch ein wenig.

In diesem Schritt blasen wir die Karte  $W_2$

$$W_2 : 2y_2^2 + 2x_1y_2 + 4y_2 = x_1^3 + x_1^2$$

entlang des Unterschemas  $C_4 = V((x_1, 2))$  auf.

Wieder benötigen wir nur zwei Karten.

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$x_1 = 2x_2,$$

und erhalten

$$2y_2^2 + 4x_2y_2 + 4y_2 = 8x_2^3 + 4x_2^2.$$

Jetzt kürzen wir 2 und kommen zu unser Karte  $W_3$

$$W_3 : y_2^2 + 2x_2y_2 + 2y_2 = 4x_2^3 + 2x_2^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$y_2^2 = 0.$$

Es gibt die Komponente

$$\mathcal{C}_5 = \{y_2 = 0\},$$

wobei  $\mathcal{C}_5$  die Vielfachheit 2 besitzt.

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $x_1$ , also

$$2 = x'\pi', \quad x_1 = x' \text{ und } y_2 = y',$$

und erhalten

$$\pi'x'y'^2 + \pi'x'^2y' + \pi'^2x'^2y' = x'^3 + x'^2.$$

Jetzt kürzen wir  $x'$  und kommen zu unser Karte  $W'_3$

$$W'_3 : \pi'y'^2 + \pi'x'y' + \pi'^2x'y' = x'^2 + x'.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $x' = 0$ , und erhält

$$x'^2 + x' = 0, \quad \pi' = 0 \text{ und}$$

$$\pi'y'^2 = 0, \quad x' = 0.$$

Es gibt die Komponenten

$$\mathcal{C}'_2 = \{x' + 1 = 0, \pi' = 0\}, \quad \mathcal{C}'_4 = \{x' = 0, \pi' = 0\} \text{ und } \mathcal{C}'_5 = \{y'^2 = 0, x' = 0\},$$

wobei hier die Komponente  $\mathcal{C}'_5$  mit der Vielfachheit 2 auftritt.

Jetzt kann man wieder zeigen, dass beim Verkleben  $\mathcal{C}_5$  und  $\mathcal{C}'_5$  zusammengeklebt werden.

Weiter findet man wie oben heraus, dass der einzige nichtreguläre Punkt, der Punkt  $P_6$ , mit  $P_6 = V((x, y, 2))$  in Karte 1 ist.

Die Aufblasung der Karte  $W_2$  sieht man in Abbildung 12.

In diesem Schritt blasen wir die Karte  $W_3$

$$W_3 : y_2^2 + 2x_2y_2 + 2y_2 = 4x_2^3 + 2x_2^2$$

entlang des Unterschemas  $\mathcal{C}_5 = V((y_2, 2))$  auf.

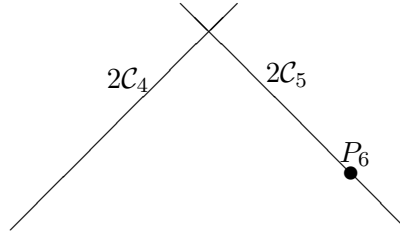


Abbildung 12: Die Aufblasung der Karte  $W_2$

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$y_2 = 2y_3,$$

und erhalten

$$4y_3^2 + 4x_2y_3 + 4y_3 = 4x_2^3 + 2x_2^2.$$

Jetzt kürzen wir 2 und kommen zu unser Karte  $W_4$

$$W_4 : 2y_3^2 + 2x_2y_3 + 2y_3 = 2x_2^3 + x_2^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$x_1^2 = 0.$$

Es gibt die Komponente

$$C_6 = \{x_2 = 0\},$$

die die Vielfachheit 2 besitzt.

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $y_2$ , also

$$2 = y'\pi', \quad x_2 = x' \quad \text{und} \quad y_2 = y',$$

und erhalten

$$y'^2 + \pi'x'y'^2 + \pi y'^2 = \pi'^2x'^3y'^2 + \pi'x'^2y'.$$

Jetzt kürzen wir  $y'$  und kommen zu unser Karte  $W'_4$

$$W'_4 : y' + \pi'x'y' + \pi y' = \pi'^2x'^3y' + \pi'x'^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $y' = 0$ , und erhält

$$y' = 0, \quad \pi' = 0 \quad \text{und}$$

$$\pi'x'^2 = 0, \quad y' = 0.$$

Es gibt die Komponenten

$$C'_5 = \{y' = 0, \pi' = 0\} \quad \text{und} \quad C'_6 = \{x' = 0, y' = 0\},$$

wobei hier die Komponenten  $C'_5$  und  $C'_6$  mit der Vielfachheit 2 auftreten.

Jetzt kann man wieder zeigen, dass beim Verkleben  $\mathcal{C}_6$  und  $\mathcal{C}'_6$  zusammengeklebt werden.

Weiter findet man wie oben heraus, dass es zwei nichtreguläre Punkte gibt. Die Punkte  $P_7 = V((x_2, y_3, 2))$  und  $P_8 = V((x_2, y_3 + 1, 2))$  auf der ersten Karte.

Die Aufblasung der Karte  $W_3$  sieht man in Abbildung 13 auf Seite 70.

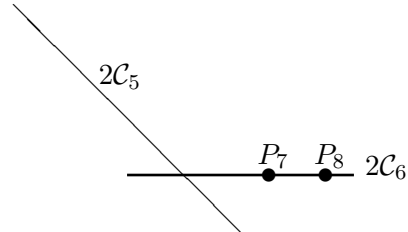


Abbildung 13: Die Aufblasung der Karte  $W_3$

In diesem Schritt blasen wir die Karte  $W_4$

$$W_4 : 2y_3^2 + 2x_2y_3 + 2y_3 = 2x_2^3 + x_2^2$$

entlang des Unterschemas  $\mathcal{C}_6 = V((x_2, 2))$  auf.

Wieder benötigen wir nur zwei Karten.

**Karte 1:** In der ersten Karte dividieren wir durch 2, also

$$x_2 = 2x_3,$$

und erhalten

$$2y_3^2 + 4x_3y_3 + 2y_3 = 16x_3^3 + 4x_3^2.$$

Jetzt kürzen wir 2 und kommen zu unserer Karte  $W_3$

$$W_3 : y_3^2 + 2x_3y_3 + y_3 = 8x_3^3 + 2x_3^2.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen und erhält

$$y_3^2 + y_3 = 0.$$

Es gibt die Komponente

$$\mathcal{C}_7 = \{y_3 = 0\} \text{ und } \mathcal{C}_8 = \{y_3 + 1 = 0\}.$$

**Karte 2:** In der zweiten Karte dividieren wir durch  $x_2$ , also

$$2 = x'\pi', \quad x_2 = x' \text{ und } y_3 = y',$$

und erhalten

$$\pi'x'y'^2 + \pi'x'^2y' + \pi'x'y' = \pi'x'^3 + x'^2.$$

Jetzt kürzen wir  $x'$  und kommen zu unser Karte  $W'_5$

$$W'_5 : \pi' y'^2 + \pi' x' y' + \pi' y' = \pi' x'^2 + x'.$$

Um die Komponenten der speziellen Faser herauszufinden, muss man jetzt  $2 = 0$  setzen, also  $\pi' = 0$  oder  $x' = 0$ , und erhält

$$\begin{aligned} x' = 0, \pi' = 0 \text{ und} \\ \pi' y'^2 + \pi' y' = 0, x' = 0. \end{aligned}$$

Es gibt die Komponenten

$$C'_6 = \{x' = 0, \pi' = 0\}, C'_7 = \{y' = 0, x' = 0\} \text{ und } C'_8 = \{y' + 1 = 0, x' = 0\},$$

wobei hier die Komponente  $C'_6$  mit der Vielfachheit 2 auftritt.

Jetzt kann man wieder zeigen, dass beim Verkleben sowohl  $C_7$  und  $C'_7$ , als auch  $C_8$  und  $C'_8$  zusammengeklebt werden.

Weiter findet man wie oben heraus, dass jetzt alle Punkte auf den Karten regulär sind.

Die Aufblasung der Karte  $W_4$  sieht man in Abbildung 14.

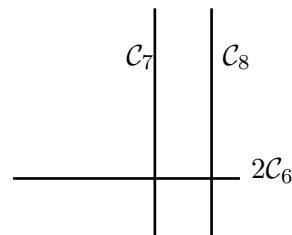


Abbildung 14: Die Aufblasung der Karte  $W_4$

Die fertige Aufblasung der Faser über (2) sieht man in Abbildung 15.

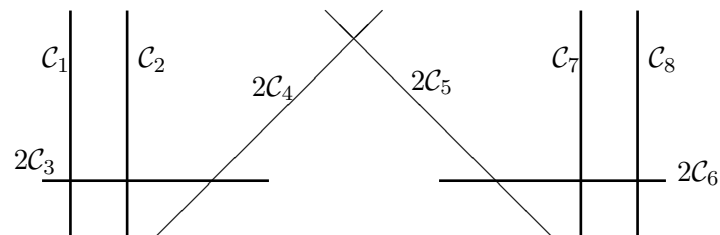


Abbildung 15: Die Faser  $C_{(2)}$  des minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve 400H1

Wir erhalten die irreduziblen Komponenten:

$$C_{(2)} = C_1 + C_2 + 2 \cdot C_3 + 2 \cdot C_4 + 2 \cdot C_5 + 2 \cdot C_6 + C_7 + C_8$$

## 4.2 Die Schnittmatrix der Komponenten der Faser über 2

Im letzten Abschnitt haben wir die Komponenten der Faser über 2 von 400H1 ausgerechnet. In diesem Kapitel interessieren uns die Schnittzahlen zwischen ihnen. Wir müssen nicht viel rechnen, denn Satz 2.27 gibt uns an, dass jeder Selbstschnitt  $-2$  ist. Weiter gibt uns Satz 2.27 Bedingungen, wie jede Zeile und Spalte aussehen muss. Vereinfachend kommt dazu, dass, wie man in Abbildung 15 sieht, sich viele Fasern gar nicht schneiden und die zugehörige Schnittzahl damit natürlich 0 ist.

Es ergibt sich als Schnittmatrix:

$(\cdot)$	$C_1$	$C_2$	$2 \cdot C_3$	$2 \cdot C_4$	$2 \cdot C_5$	$2 \cdot C_6$	$C_7$	$C_8$
$C_1$	-2	0	2	0	0	0	0	0
$C_2$	0	-2	2	0	0	0	0	0
$2 \cdot C_3$	2	2	-8	4	0	0	0	0
$2 \cdot C_4$	0	0	4	-8	4	0	0	0
$2 \cdot C_5$	0	0	0	4	-8	4	0	0
$2 \cdot C_6$	0	0	0	0	4	-8	2	2
$C_7$	0	0	0	0	0	2	-2	0
$C_8$	0	0	0	0	0	2	0	-2

## 4.3 Reduktion der Punkte auf 400H1 modulo 2

Wir stehen jetzt vor der Aufgabe zu bestimmen, welche Komponente der Faser über (2) der Zariski-Abschluss eines Punktes aus  $E(\mathbb{Q})$  schneidet. Wir beginnen mit einer Definition.

**Definition 4.1** Sei  $E/\mathbb{Q}$  eine elliptische Kurve und  $C/\mathbb{Z}$  das minimale, reguläre, eigentlich Modell von  $E/\mathbb{Q}$ . Sei  $C_p = \sum n_i C_i$  eine spezielle Faser. Dann bezeichnen wir mit  $A(C_i)$  die Menge aller Punkte  $P$  aus  $E(\mathbb{Q})$ , deren Zariski-Abschluss  $\bar{P}$  die Komponente  $C_i$  schneidet, also

$$A(C_i) = \{P \in E(\mathbb{Q}) \mid \bar{P} \cap C_i \neq \emptyset\}.$$

Mit dieser Bezeichnung folgen einige Aussagen.

**Lemma 4.2** Sei  $E/\mathbb{Q}$  eine elliptische Kurve und  $C/\mathbb{Z}$  das minimale, reguläre, eigentlich Modell von  $E/\mathbb{Q}$ . Sei  $C_p = \sum n_i C_i$  eine spezielle Faser. Dann gilt

- $n_i > 1 \Rightarrow A(C_i) = \emptyset$ .
- $A(C_i) \cap A(C_j) = \emptyset$ , falls  $i \neq j$ .
- $\bigcup A(C_i) = E(\mathbb{Q})$ .



**Beweis** Alle drei Aussagen folgen direkt aus Satz 2.20, da der Zariski-Abschluss eines Punktes aus  $E(\mathbb{Q})$  glatt auf der arithmetischen Fläche ist und damit auch jede Faser in einem nichtsingulären Punkt schneidet.

Da Punkte auf Fasern mit einer Multiplizität größer als 1 nichtsingulär sind, folgt die erste Aussage.

Schnittpunkte zweier Komponenten sind nichtsingulär. Daraus folgt die zweite Aussage.

Da der Zariski-Abschluss jede Faser schneidet, folgt auch die dritte Aussage.

□

Jetzt betrachten wir wieder unsere Kurve

$$E : y^2 = x^3 + 5x + 10.$$

Leider ist es aufwendig, Gleichungen für die Mengen  $A(\mathcal{C}_i)$  zu finden. Wir werden zuerst Gleichungen für Punkte auf der Kurve

$$W_0 : y^2 + 2xy + 8y = x^3 + 2x$$

finden und diese dann für die Kurve  $E$  übertragen.

In Satz 2.19 hatten wir gesehen, dass der Schnittpunkt des Zariski-Abschlusses eines Punktes gerade die Reduktion dieses Punktes ist. Jetzt müssen wir die abstrakte Konstruktion von  $\tau_2$  aus Abschnitt 2.5 explizit ausführen.

Wir müssen dazu die homogene Gleichung

$$W_0 : Y^2Z + 2XYZ + 2YZ^2 = X^3 + 2XZ^2$$

betrachten. Sei  $P = [x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q})$ . Wir bestimmen worauf die Reduktion  $P_{\mathfrak{p}}$  von  $P$  bei den Aufblasungen abgebildet wird.

Man beachte Satz 2.32, der die Situation etwas vereinfacht.

Sei im Folgenden  $P = [x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q})$  immer so gewählt, dass  $x, y, z \in \mathbb{Z}_{\langle \mathfrak{p} \rangle}$  und  $x, y$  oder  $z$  eine Einheit ist.

Betrachten wir die erste Aufblasung, so liegen alle Punkte  $P$ , die modulo (2) nicht in den nichtregulären Punkt  $P_3 = (0, 0, 1) (= V((x, y, 2)) \in W_0)$  fallen, auf der Komponente  $\mathcal{C}_1$ . Es ergibt sich, dass alle modulo (2) regulären Punkte in  $A_0(\mathcal{C}_1)$  sind, das sind gerade die, bei denen die 2-adische Bewertung  $\nu_2$  der  $x$ - oder  $y$ -Koordinate Null ist. Also ist

$$A_0(\mathcal{C}_1) = \{[x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(x) \cdot \nu_2(y) = 0\}.$$

Betrachten wir weiter die Abbildung der Kurve zu der Karte  $W_1$ , so können Punkte  $P$  für die  $\nu_2(x) > 0$  und  $\nu_2(y) > 0$  gilt, entweder auf den Punkt  $P_2 = V((x_1 - 1, y_1, 2)) \in W_1$

oder auf den Punkt  $P_4 = V((x_1, y_1, 2)) \in W_1$  abgebildet werden. Die Abbildungen auf die erste Karte entspricht dem dividieren der Koordinaten durch 2. Im ersten Fall landen sie bei der nächsten Aufblasung auf der Komponente  $\mathcal{C}_2$ . Das bedeutet, die Komponente  $\mathcal{C}_2$  schneiden alle Punkte  $P$  für die  $\nu_2(x) = 1$  gilt:

$$A_0(\mathcal{C}_2) = \{[x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(x) = 1\}$$

Wird der Punkt dagegen auf den Punkt  $P_4$  abgebildet, so wird er bei der nächsten Aufblasung auf den Punkt  $P_5 = V((x_1, y_2, 2)) \in W_2$  abgebildet, denn es gibt ja nur einen nichtregulären Punkt. In der nächsten Aufblasung wird er auf den Punkt  $P_6 = V((x_2, y_2, 2))$  in Karte  $W_3$  abgebildet und in der nächsten Aufblasung gibt es dann zwei Möglichkeiten. Entweder wird er auf den Punkt  $P_7 = V((x_2, y_3, 2)) \in W_4$  oder den Punkt  $P_8 = V((x_2 - 1, y_3, 2))$  abgebildet. Bei der nächsten Aufblasung liegen die Punkte von  $P_7$  auf  $\mathcal{C}_7$  und die von  $P_8$  auf  $\mathcal{C}_8$ . Also gilt

$$A_0(\mathcal{C}_7) = \{[x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(y) > 3\} \text{ und}$$

$$A_0(\mathcal{C}_8) = \{[x : y : z] \in W_0(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(y) = 3\}.$$

Übertragen wir diese Resultate jetzt zurück auf die Kurve  $E$  mittels der Umformung (4), so ergibt sich

$$A(\mathcal{C}_1) = \{[x : y : z] \in E(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(x - 1) \cdot \nu_2(y - 1) = 0\};$$

$$= \{[x : y : z] \in E(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(x) \cdot \nu_2(y) > 0\};$$

$$A(\mathcal{C}_2) = \{[x : y : z] \in E(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(x - 1) = 1\};$$

$$A(\mathcal{C}_7) = \{[x : y : z] \in E(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(y - x - 3) > 3\};$$

$$A(\mathcal{C}_8) = \{[x : y : z] \in E(\mathbb{Q}) \mid \nu_2(y - x - 3) = 3\}.$$

Betrachtet man jetzt unsere Punkte

$$S_0 = [1 : 4 : 1], S_1 = [6 : 16 : 1], S_3 = [1 : -4 : 1]$$

$$S_6 = [6 : -16 : 1] \text{ und } S_\infty = o = [0 : 1 : 0],$$

so sieht man

$$S_0 \in A(\mathcal{C}_7), S_1 \in A(\mathcal{C}_1), S_3 \in A(\mathcal{C}_8), S_6 \in A(\mathcal{C}_1), \text{ und } S_\infty \in A(\mathcal{C}_1).$$

Bezeichne jetzt  $Q_i$  den Schnittpunkt des Zariski-Abschlusses von  $S_0$  mit der Faser  $\mathcal{C}_{(2)}$ . Abbildung 16 zeigt die Faser  $\mathcal{C}_{(2)}$  mit Komponenten und Schnittpunkten.

In einer Tabelle (siehe Tabelle 1 auf Seite 75) sieht man welcher Divisor welche Komponente schneidet, wobei 1 bedeutet, dass der Divisor und die Komponente sich schneiden und 0, dass sie es nicht tun.

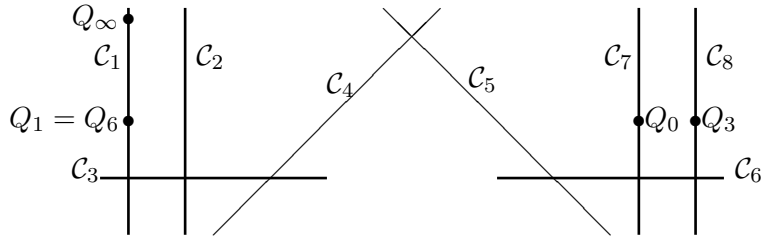


Abbildung 16: Die Schnittpunkte der Zariski-Abschlüsse mit den Komponenten der Faser über 2

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$
$D_0$	0	0	0	0	0	0	1	0
$D_1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$D_3$	0	0	0	0	0	0	0	1
$D_6$	1	0	0	0	0	0	0	0
$D_\infty$	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 1: Die Schnittpunkte der Divisoren mit den Komponenten der Faser über 2

Insbesondere gilt

$$Q_1 = Q_6 \text{ und}$$

$$Q_i \neq Q_j$$

für alle anderen  $i$  und  $j$ .

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von  $D_1$  und  $D_6$  mit

$$P_{16} = Q_1 = Q_6.$$

#### 4.4 Reduktion der Punkte auf 400H1 außerhalb 2

Wir haben eben gesehen, dass sich in der Faser  $C_{(2)}$  die Divisoren  $D_1$  und  $D_6$  schneiden. Um später die Schnittzahlen auszurechnen, benötigen wir alle Punkte, in denen sich zwei der Divisoren schneiden, also wo für zwei Punkte  $S_1 = (x_1, y_1), S_2 = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{Z})$  und ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}$  gilt, dass  $x_1 \equiv x_2$  und  $y_1 \equiv y_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ . Der folgende Satz gibt uns eine notwendige Bedingung für Schnittpunkte.

**Satz 4.3** Seien  $S_1 = (x_1, y_1), S_2 = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{Z})$  zwei Punkte auf einer elliptischen Kurve über  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in  $\mathbb{Z}$  und  $d_{12} = x_1 y_2 - y_1 x_2$ .

Falls  $d_{12} \notin \mathfrak{p}$ , dann schneiden sich die Zariski-Abschlüsse von  $S_1$  und  $S_2$  nicht in der Faser über  $\mathfrak{p}$ .

**Beweis** Seien  $S_1 = (x_1, y_1)$  und  $S_2 = (x_2, y_2)$  zwei Punkte auf einer elliptischen Kurve über  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathfrak{p}$  ein Primideal in  $\mathbb{Z}$ . Wir nehmen an, die Zariski-Abschlüsse von  $S_1$  und  $S_2$  schneiden sich in der Faser über  $\mathfrak{p}$ . Das bedeutet, dass  $S_1 \equiv S_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ , also  $x_1 \equiv x_2$  und  $y_1 \equiv y_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ . Daraus folgt, dass  $d_{12} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ , also gilt  $d_{12} \in \mathfrak{p}$ .

□

Berechnen wir die  $d_{ij}$  für  $S_0, S_1, S_3$  und  $S_6$ .

$$\begin{aligned} d_{01} &= 1 \cdot 16 - 4 \cdot 6 = 16 - 24 = -8 = -2^3 \\ d_{03} &= 1 \cdot (-4) - 4 \cdot 1 = -4 - 4 = -8 = -2^3 \\ d_{06} &= 1 \cdot (-16) - 4 \cdot 6 = -16 - 24 = -40 = -2^3 \cdot 5 \\ d_{13} &= 6 \cdot (-4) - 16 \cdot 1 = -24 - 16 = -40 = -2^3 \cdot 5 \\ d_{16} &= 6 \cdot (-16) - 16 \cdot 6 = -96 - 96 = -192 = -2^6 \cdot 3 \\ d_{36} &= 1 \cdot (-16) - (-4) \cdot 6 = -16 - 24 = -40 = -2^3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Nun findet man durch Ausprobieren heraus, dass die einzige Faser wo sich zwei unserer Divisoren schneiden, die Faser über (5) ist und dort gilt:

$$D_0 \cap D_6 = P_{06} \text{ und } D_1 \cap D_3 = P_{13}$$

In Abbildung 17 sieht man das minimale, reguläre, eigentliche Modell der Kurve 400H1 mit den betrachteten Divisoren. Die Schnittpunkte der Divisoren mit den Fasern sind durch Punkte verdeutlicht.

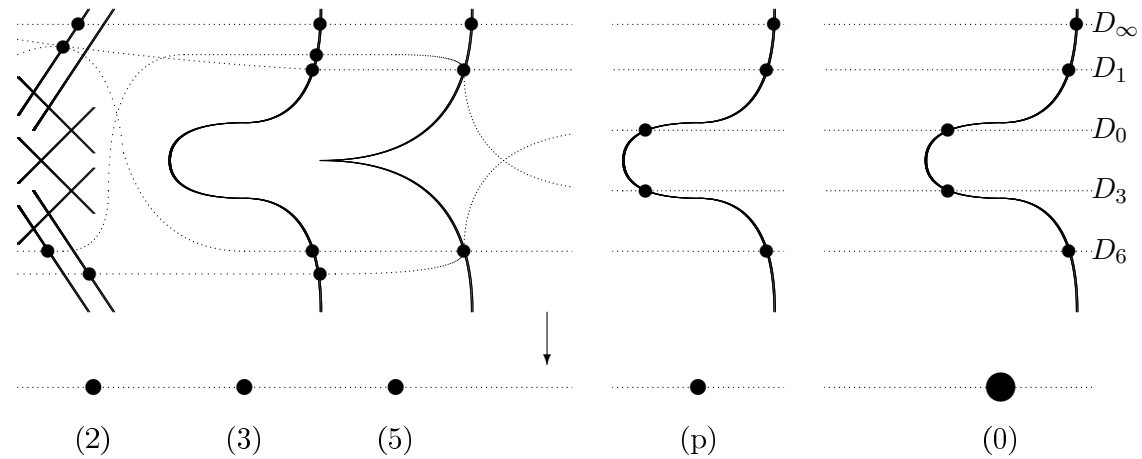


Abbildung 17: Die assoziierten Divisoren auf dem minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve 400H1

## 4.5 Die lokalen Schnittzahlen

In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wurde gezeigt, dass sich einige der Divisoren schneiden. Für diese Punkte wollen wir in diesem Abschnitt die lokalen Schnittzahlen ausrechnen.

**Die Schnittzahl der Divisoren  $D_1$  und  $D_6$  in der Faser über (2).** Als erstes betrachten wir die Faser über (2). Dort treffen sich die Divisoren  $D_1$  und  $D_6$  in dem Punkt  $P_{16} = V((x, y, 2))$ . Wir berechnen ihre Schnittzahl  $m_{16,2}$ .

Da eine Aufblasung außerhalb des Zentrums ein Isomorphismus ist und sich die Divisoren  $D_1$  und  $D_6$  in einem regulären Punkt schneiden, können wir die lokalen Schnittzahlen auch auf dem Weierstraßmodell  $W$  von  $E$  ausrechnen.

Für die lokalen Gleichungen  $f_1, f_6$  muss gelten

$$\begin{aligned} \text{ord}_1(f_1) &= 1, \text{ord}_6(f_1) = 0 \text{ und} \\ \text{ord}_1(f_6) &= 0, \text{ord}_6(f_6) = 1. \end{aligned}$$

Schaut man sich die Gleichung von  $E$  an, so ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + 5x + 10 \\ \Leftrightarrow y^2 - 256 &= x^3 + 5x - 246 \\ \Leftrightarrow (y - 16)(y + 16) &= (x - 6)(x^2 + 6x + 41). \end{aligned}$$

Da  $(y + 16)$  und  $(x^2 + 6x + 41)$  in  $\mathcal{O}_{D_1}$  Einheiten sind, gilt

$$\text{ord}_1(x - 6) = 1, \text{ord}_1(y - 16) = 1 \text{ und } \text{ord}_1(y + 16) = 0$$

und da  $(y - 16)$  und  $(x^2 + 6x + 41)$  in  $\mathcal{O}_{D_6}$  Einheiten sind, gilt

$$\text{ord}_6(x - 6) = 1, \text{ord}_6(y - 16) = 0 \text{ und } \text{ord}_6(y + 16) = 1.$$

Es ergeben sich die lokalen Gleichungen  $f_1 = y - 16$  für  $D_1$  und  $f_6 = y + 16$  für  $D_6$ .

Mit ihnen ergibt sich für den Modul:

$$\mathcal{O}_{W, P_{16}} / (f_1, f_6) = (\mathbb{Z}[x, y] / (y^2 - x^3 - 5x - 10))_{\langle (2, x, y) \rangle} / (y - 16, y + 16)$$

jetzt dürfen wir nach Satz 1.17 Lokalisierung und Quotientenbildung vertauschen

$$= \mathbb{Z}[x, y] / (y^2 - x^3 - 5x - 10, y - 16, y + 16)_{\langle (2, x, y) \rangle}$$

weiter benutzen wir die Einsetzungshomomorphismen  $y \mapsto 16$  und  $x \mapsto 6$

$$= \mathbb{Z}[x] / (-x^3 - 5x + 246, 32)_{\langle (2, x) \rangle}$$

$$= \mathbb{Z} / (32)_{\langle (2) \rangle} = \mathbb{Z} / (32)$$

Und so ergibt sich für die Schnittzahl

$$i_{P_{16}}(D_1, D_6) = \ell_{\mathcal{O}_{W, P_{16}}} \mathcal{O}_{W, P_{16}} / (f_1, f_6) = \ell_{\mathcal{O}_{W, P_{16}}} \mathbb{Z} / (32) = 5.$$

**Die Schnittzahl der Divisoren  $D_0$  und  $D_6$  in der Faser über (5).** Als nächstes betrachten wir die Faser über (5). Dort treffen sich die Divisoren  $D_0$  und  $D_6$  in dem Punkt  $P_{06} = V((5, x - 1, y + 1))$ . Wir berechnen ihre Schnittzahl  $m_{06,5}$ .

Schaut man sich die wieder Gleichung von  $E$  an, so ergeben sich die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + 5x + 10 \\ \Leftrightarrow y^2 - 256 &= x^3 + 5x - 246 \\ \Leftrightarrow (y - 16)(y + 16) &= (x - 6)(x^2 + 6x + 41) \\ \Leftrightarrow y^2 - 16 &= x^3 + 5x - 6 \\ \Leftrightarrow (y - 4)(y + 4) &= (x - 1)(x^2 + x + 6). \end{aligned}$$

Also folgt für  $f_0 = y - 4$  und  $f_6 = y + 16$

$$\begin{aligned} \text{ord}_0(f_0) &= 1, \text{ord}_6(f_0) = 0 \text{ und} \\ \text{ord}_0(f_6) &= 0, \text{ord}_6(f_6) = 1. \end{aligned}$$

Also können wir  $f_0$  und  $f_6$  als lokale Gleichungen nehmen.

Wir verzichten in diesem Fall auf Erläuterungen, da es die Übersichtlichkeit stark verbessert. Sie sind aber absolut analog wie im ersten Fall, sodass man bei Bedarf dort nachschauen sollte.

Zuerst berechnen wir wieder den Modul:

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_{W, P_{06}} / (f_0, f_6) \\ &= (\mathbb{Z}[x, y] / (y^2 - x^3 - 5x - 10))_{\langle (5, x-1, y+1) \rangle} / (y - 4, y + 16) \\ &= \mathbb{Z}[x, y] / (y^2 - x^3 - 5x - 10, y - 4, y + 16)_{\langle (5, x-1, y+1) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x] / (-x^3 - 5x + 246, 20)_{\langle (5, x-1) \rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x] / ((x - 6)(-x^2 - 6x - 41), 20)_{\langle (5, x-1) \rangle} \\ &= \mathbb{Z} / (20)_{\langle (5) \rangle} = \mathbb{Z} / (5). \end{aligned}$$

Und so ergibt sich für die Schnittzahl

$$i_{P_{06}}(D_0, D_6) = \ell_{\mathcal{O}_{W, P_{06}}} \mathcal{O}_{W, P_{06}} / (f_0, f_6) = \ell_{\mathcal{O}_{W, P_{06}}} \mathbb{Z} / (5) = 1.$$

**Die Schnittzahl der Divisoren  $D_1$  und  $D_3$  in der Faser über (5).** In der Faser über (5) treffen sich auch noch die Divisoren  $D_1$  und  $D_3$  in dem Punkt  $P_{13} = V((5, x - 1, y - 1))$ . Wir berechnen ihre Schnittzahl  $m_{13,5}$ .

Seien  $f_1 = y - 16 = 0$  und  $f_3 = y + 3 = 0$  so ergibt sich wie eben

$$\text{ord}_1(f_1) = 1, \text{ord}_3(f_1) = 0 \text{ und}$$

$$\text{ord}_1(f_3) = 0, \text{ord}_3(f_3) = 1.$$

Also können wir  $f_0$  und  $f_6$  als lokale Gleichungen nehmen.

Wir verzichten wegen der besseren Übersicht in diesem Fall wieder auf die Erläuterungen.

Zuerst berechnen wir wieder den Modul:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_{W,P_{13}}/(f_1, f_3) \\ &= (\mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 5x - 10))_{\langle(5, x-1, y-11)\rangle} / (y + 4, y - 16) \\ &= \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - x^3 - 5x - 10, y + 4, y - 16)_{\langle(5, x-1, y-1)\rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x]/(-x^3 - 5x + 246, 20)_{\langle(5, x-1)\rangle} \\ &= \mathbb{Z}[x]/((x - 6)(-x^2 - 6x - 41), 20)_{\langle(5, x-1)\rangle} \\ &= \mathbb{Z}/(20)_{\langle(5)\rangle} = \mathbb{Z}/(5). \end{aligned}$$

Und so ergibt sich für die Schnittzahl

$$i_{P_{13}}(D_1, D_3) = \ell_{\mathcal{O}_{W,P_{13}}} \mathcal{O}_{W,P_{13}}/(f_1, f_3) = \ell_{\mathcal{O}_{W,P_{13}}} \mathbb{Z}/(5) = 1.$$

## 4.6 Der algebraische Anteil der Schnittzahlen

Jetzt wollen wir den endlichen Anteil der Arakelov-Schnittzahlen ausrechnen. Dazu betrachten wir die Punkte  $S_0, \dots, S_\infty$  als Divisoren auf  $E$  und definieren

$$S_{ij} = S_i - S_j, \quad i, j \in \{0, 1, 3, 6, \infty\}.$$

Weiter definieren wir

$$D_{ij} = \overline{S}_{ij} = D_i - D_j, \quad i, j \in \{0, 1, 3, 6, \infty\}.$$

Zu jedem Divisor  $S_{ij}$  gibt es nun nach Satz 3.18 einen Divisor  $\Phi_{ij}$ , sodass für jeden vertikalen Divisor  $D$  des minimalen Modells gilt

$$(D_{ij} + \Phi_{ij}) \cdot D = 0.$$

Damit definieren wir den Divisor auf dieser Fläche als

$$\mathcal{D}_{ij} = D_{ij} + \Phi_{ij} = D_i - D_j + \Phi_{ij}.$$

Die Abbildung  $\Phi_{ij}$  ist, wie wir in Kapitel 3 gesehen hatten, eine Korrektur, damit die Schnittzahl unabhängig von dem betrachteten Modell ist.

Konstruktiv findet man diese Divisoren  $\Phi_{ij}$ , indem man das folgende Gleichungssystem löst.

In unserem Fall ist  $\Phi_{ij} \in \mathbb{Q} \otimes \text{Div}_{(2)}(\mathcal{E})$ , da unsere Divisoren bereits senkrecht auf allen anderen vertikalen Divisoren stehen. Also besitzt  $\Phi_{ij}$  eine Darstellung  $\Phi_{ij} = n_1\mathcal{C}_1 + n_2\mathcal{C}_2 + n_3\mathcal{C}_3 + n_4\mathcal{C}_4 + n_5\mathcal{C}_5 + n_6\mathcal{C}_6 + n_7\mathcal{C}_7 + n_8\mathcal{C}_8$  mit  $n_i \in \mathbb{Q}$ .

Das Gleichungssystem bekommen wir jetzt, indem wir  $\mathcal{D}_{ij} = D_{ij} + \Phi_{ij}$  mit jeder irreduziblen Komponente der Faser über (2) schneiden.

$$\begin{aligned}
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_1 + n_1 \mathcal{C}_1^2 + n_3 \mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_3 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_2 + n_2 \mathcal{C}_2^2 + n_3 \mathcal{C}_2 \cdot \mathcal{C}_3 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_3 + n_1 \mathcal{C}_3 \cdot \mathcal{C}_1 + n_2 \mathcal{C}_3 \cdot \mathcal{C}_2 + n_3 \mathcal{C}_3^2 + n_4 \mathcal{C}_3 \cdot \mathcal{C}_4 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_4 + n_3 \mathcal{C}_4 \cdot \mathcal{C}_3 + n_4 \mathcal{C}_4^2 + n_5 \mathcal{C}_4 \cdot \mathcal{C}_5 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_5 + n_4 \mathcal{C}_5 \cdot \mathcal{C}_4 + n_5 \mathcal{C}_5^2 + n_6 \mathcal{C}_5 \cdot \mathcal{C}_6 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_6 + n_5 \mathcal{C}_6 \cdot \mathcal{C}_5 + n_6 \mathcal{C}_6^2 + n_7 \mathcal{C}_6 \cdot \mathcal{C}_7 + n_8 \mathcal{C}_6 \cdot \mathcal{C}_8 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_7 + n_6 \mathcal{C}_7 \cdot \mathcal{C}_6 + n_7 \mathcal{C}_7^2 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_8 + n_6 \mathcal{C}_8 \cdot \mathcal{C}_6 + n_8 \mathcal{C}_8^2 &= 0
\end{aligned}$$

Da die Komponenten sich alle transversal schneiden und der Selbstschnitt immer  $-2$  ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_1 - 2n_1 + n_3 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_2 - 2n_2 + n_3 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_3 + n_1 + n_2 - 2n_3 + n_4 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_4 + n_3 - 2n_4 + n_5 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_5 + n_4 - 2n_5 + n_6 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_6 + n_5 - 2n_6 + n_7 + n_8 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_7 + n_6 - 2n_7 &= 0 \\
D_{ij} \cdot \mathcal{C}_8 + n_6 - 2n_8 &= 0.
\end{aligned}$$

Da gilt, dass

$$(\mathcal{D}_{ij} \cdot \mathcal{D}_{kl}) = (\mathcal{D}_{ij} \cdot D_{kl})$$

benötigen wir für unsere Rechnungen nur die Divisoren  $\Phi_{01}, \Phi_{03}, \Phi_{06}, \Phi_{0\infty}, \Phi_{\infty 1}, \Phi_{\infty 3}$  und  $\Phi_{\infty 6}$ . Da  $P_1, P_6$  und  $P_\infty$  auf der gleichen Faser liegen, d.h. die Divisoren  $D_1, D_6$  und  $D_\infty$  schneiden die gleiche irreduzible Komponente (siehe Abbildung 17 auf Seite 76), gilt

$$\Phi_{01} = \Phi_{06} = \Phi_{0\infty} = -\Phi_{\infty 3} \text{ und } \Phi_{\infty 1} = \Phi_{\infty 6} = 0.$$

Die folgenden Divisoren erfüllen das obige Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\Phi_{01} &= -\frac{5}{4}\mathcal{C}_1 - \frac{3}{4}\mathcal{C}_2 - \frac{3}{2}\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_4 - \frac{1}{2}\mathcal{C}_5 + \frac{1}{2}\mathcal{C}_7, \\
\Phi_{06} &= \frac{1}{2}\mathcal{C}_7 - \frac{1}{2}\mathcal{C}_8,
\end{aligned}$$



$$\Phi_{\infty 3} = \frac{5}{4}\mathcal{C}_1 + \frac{3}{4}\mathcal{C}_2 + \frac{3}{2}\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 + \frac{1}{2}\mathcal{C}_5 - \frac{1}{2}\mathcal{C}_8.$$

Jetzt können wir den algebraischen Anteil der Schnittzahl ausrechnen.

Wir machen es nur exemplarisch für unser erstes Paar von Divisoren.

$$\begin{aligned} (S_{01} \cdot S_{36}) &= (\mathcal{D}_{01} \cdot \mathcal{D}_{36}) \\ &= (D_{01} + \Phi_{01}) \cdot D_{36} \\ &= (D_0 - D_1 + \Phi_{01}) \cdot (D_3 - D_6) \\ &= D_0 \cdot D_3 - D_0 \cdot D_6 - D_1 \cdot D_3 + D_1 \cdot D_6 + \Phi_{01} \cdot D_3 - \Phi_{01} \cdot D_6 \\ &= 0 - m_{06,5} \log(5) + m_{13,5} \log(5) + m_{16,2} \log(2) \\ &\quad + 0 + \left(\frac{5}{4}\mathcal{C}_1 \cdot D_6\right) \log(2) \\ &= 0 - \log(5) - \log(5) + 5 \log(2) + 0 + \frac{5}{4} \log(2) \\ &= \frac{25}{4} \log(2) - 2 \log(5) \end{aligned}$$

Für die andere Paare ergibt sich analog

$$\begin{aligned} (S_{03} \cdot S_{16}) &= (\mathcal{D}_{03} \cdot \mathcal{D}_{16}) = (D_0 - D_3 + \Phi_{03}) \cdot (D_1 - D_6) = & -2 \log(5) \\ (S_{06} \cdot S_{31}) &= (\mathcal{D}_{06} \cdot \mathcal{D}_{31}) = (D_0 - D_6 + \Phi_{06}) \cdot (D_3 - D_1) = & \frac{25}{4} \log(2) \\ (S_{01} \cdot S_{3\infty}) &= (\mathcal{D}_{01} \cdot \mathcal{D}_{3\infty}) = (D_0 - D_1 + \Phi_{01}) \cdot (D_3 - D_\infty) = & \frac{5}{4} \log(2) - \log(5) \\ (S_{03} \cdot S_{1\infty}) &= (\mathcal{D}_{03} \cdot \mathcal{D}_{1\infty}) = (D_0 - D_3 + \Phi_{03}) \cdot (D_1 - D_\infty) = & -\log(5) \\ (S_{0\infty} \cdot S_{31}) &= (\mathcal{D}_{0\infty} \cdot \mathcal{D}_{31}) = (D_0 - D_\infty + \Phi_{0\infty}) \cdot (D_3 - D_1) = & \frac{5}{4} \log(2) \\ (S_{01} \cdot S_{\infty 6}) &= (\mathcal{D}_{01} \cdot \mathcal{D}_{\infty 6}) = (D_0 - D_1 + \Phi_{01}) \cdot (D_\infty - D_6) = & 5 \log(2) - \log(5) \\ (S_{0\infty} \cdot S_{16}) &= (\mathcal{D}_{0\infty} \cdot \mathcal{D}_{16}) = (D_0 - D_\infty + \Phi_{0\infty}) \cdot (D_1 - D_6) = & -\log(5) \\ (S_{06} \cdot S_{\infty 1}) &= (\mathcal{D}_{06} \cdot \mathcal{D}_{\infty 1}) = (D_0 - D_6 + \Phi_{06}) \cdot (D_\infty - D_1) = & 5 \log(2) \\ (S_{0\infty} \cdot S_{36}) &= (\mathcal{D}_{0\infty} \cdot \mathcal{D}_{36}) = (D_0 - D_\infty + \Phi_{0\infty}) \cdot (D_3 - D_6) = & \frac{5}{4} \log(2) - \log(5) \\ (S_{03} \cdot S_{\infty 6}) &= (\mathcal{D}_{03} \cdot \mathcal{D}_{\infty 6}) = (D_0 - D_3 + \Phi_{03}) \cdot (D_\infty - D_6) = & -\log(5) \\ (S_{06} \cdot S_{3\infty}) &= (\mathcal{D}_{06} \cdot \mathcal{D}_{3\infty}) = (D_0 - D_6 + \Phi_{06}) \cdot (D_3 - D_\infty) = & \frac{5}{4} \log(2) \\ (S_{\infty 1} \cdot S_{36}) &= (\mathcal{D}_{\infty 1} \cdot \mathcal{D}_{36}) = (D_\infty - D_1 + \Phi_{\infty 1}) \cdot (D_3 - D_6) = & 5 \log(2) - \log(5) \\ (S_{\infty 3} \cdot S_{16}) &= (\mathcal{D}_{\infty 3} \cdot \mathcal{D}_{16}) = (D_\infty - D_3 + \Phi_{\infty 3}) \cdot (D_1 - D_6) = & -\log(5) \\ (S_{\infty 6} \cdot S_{31}) &= (\mathcal{D}_{\infty 6} \cdot \mathcal{D}_{31}) = (D_\infty - D_6 + \Phi_{\infty 6}) \cdot (D_3 - D_1) = & 5 \log(2) . \end{aligned}$$

Die Ergebnisse sieht man zusammengefasst in der Tabelle 2 auf Seite 82. Dort wo in der Tabelle leere Stellen sind, können wir die Werte leider nicht berechnen, da wir dafür Selbstschnitte von horizontalen Divisoren ausrechnen müssten, was wir mit der in dieser Diplomarbeit behandelten Theorie leider nicht können.

$(\cdot)_{alg}$	$S_{01}$	$S_{03}$	$S_{06}$	$S_{0\infty}$	$S_{13}$	$S_{16}$	$S_{1\infty}$	$S_{36}$	$S_{3\infty}$	$S_{6\infty}$
$S_{01}$								$\frac{25}{4}l_2 - 2l_5$	$\frac{5}{4}l_2 - l_5$	$-5l_2 + l_5$
$S_{03}$						$-2l_5$	$-l_5$			$l_5$
$S_{06}$					$-\frac{25}{4}l_2$		$-5l_2$		$\frac{5}{4}l_2$	
$S_{0\infty}$					$-\frac{5}{4}l_2$	$-l_5$		$\frac{5}{4}l_2 - l_5$		
$S_{13}$			$-\frac{25}{4}l_2$	$-\frac{5}{4}l_2$						$5l_2$
$S_{16}$		$-2l_5$		$-l_5$					$l_5$	
$S_{1\infty}$		$-l_5$	$-5l_2$					$-5l_2 + l_5$		
$S_{36}$	$\frac{25}{4}l_2 - 2l_5$			$\frac{5}{4}l_2 - l_5$			$-5l_2 + l_5$			
$S_{3\infty}$	$\frac{5}{4}l_2 - l_5$		$\frac{5}{4}l_2$			$l_5$				
$S_{6\infty}$	$-5l_2 + l_5$	$l_5$			$5l_2$					

Tabelle 2: Die algebraischen Schnittzahlen.  $l_2 = \log(2)$ ,  $l_5 = \log(5)$

## 5 Néron-Tate-Höhenberechnung zur Kurve 400H1

In diesem Kapitel wollen wir nun die Rechnungen des letzten Kapitels benutzen um ein Beispiel für den Satz 3.37 auszuarbeiten. Das heißt wir berechnen die Néron-Tate-Höhe mit Hilfe von Arakelov-Schnittzahlen. Zu dem algebraischen Anteil kommt noch der analytische Anteil, über den Anna Posingies [Po] ihre Diplomarbeit geschrieben hat. Diesen Wert werden wir mit einem direkt mit Pari ausgerechneten Wert der Néron-Tate-Höhenpaarung vergleichen.

### 5.1 Der analytische Anteil der Arakelov-Schnittzahl

Für die Kurve 400H1 hat N. Elkies einen Belyi-Morphismus angegeben.

**Satz 5.1** (siehe [El]) Sei  $E$  die elliptische Kurve 400H1. Dann definiert die Abbildung

$$\beta : E \rightarrow \mathbb{P}^1, (x, y) \mapsto \beta(x, y) = \frac{y(x-5) + 16}{32}$$

einen Belyi-Morphismus, der nur über  $0, 1$  und  $\infty$  verzweigt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(0) &= 4 \cdot (1, 4) + 1 \cdot (6, 16) &&= 4 \cdot S_0 + 1 \cdot S_1 \\ \beta^{-1}(1) &= 4 \cdot (1, -4) + 1 \cdot (6, -16) &&= 4 \cdot S_3 + 1 \cdot S_6 \\ \beta^{-1}(\infty) &= 5 \cdot o &&= 5 \cdot S_\infty. \end{aligned}$$

□

Die Divisoren  $S_{ij}$  aus Abschnitt 4.6 sind für das Belyi-Paar  $(400H1, \beta)$  Spitzendivisoren.

In ihrer Diplomarbeit hat Anna Posingies gezeigt, wie man für  $S_{ij}$  den analytischen Anteil der Arakelov-Schnittzahl annähern kann.

Sie hat auch insbesondere die Streukonstanten  $C_{jk}$  (definiert in (3.34) auf Seite 60) aus Satz 3.37 numerisch ausgerechnet, sodass man den analytischen Anteil, durch Einsetzen dieser speziellen Werte nicht absolut konvergenter Reihen in die Formel, berechnen kann.

Es sei hierbei bemerkt, dass der analytische Anteil, da er von einer unendlichen nicht absolut konvergenten Reihe herrührt, nicht exakt ist (im Gegensatz zu dem algebraischen Anteil). A. Posingies hat für ihre Diplomarbeit die ersten 500 Reihenglieder ausgerechnet. Wir werden später sehen, in welchen Maße durch diese Ungenauigkeit Fehler auftreten.

Welche Werte sich für die analytischen Schnittzahlen ergeben, entnimmt man der Tabelle 3 auf Seite 84.

$(\cdot)_{\infty}^a$	$S_{01}$	$S_{03}$	$S_{06}$	$S_{0\infty}$	$S_{13}$	$S_{16}$	$S_{1\infty}$	$S_{36}$	$S_{3\infty}$	$S_{6\infty}$
$S_{01}$								0,040391	0,357240	0,316848
$S_{03}$						1,163871	0,581936			-0,581936
$S_{06}$					1,123480		0,898784		-0,224696	
$S_{0\infty}$					0,224696	0,581936		0,357240		
$S_{13}$			1,123480	0,224696						
$S_{16}$		1,163871		0,581936					-0,581936	
$S_{1\infty}$		0,581936	0,898784					0,316848		
$S_{36}$	0,040391			0,357240			0,316848			
$S_{3\infty}$	0,357240		0,224696			-0,581936				
$S_{6\infty}$	0,316848	-0,581936			-0,898784					

Tabelle 3: Die analytischen Schnittzahlen<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Dank an A. Posingies, für die Bereitstellung der Daten

## 5.2 Die Néron-Tate-Höhenpaarung der Divisoren mittels Pari

Mit Pari kann man die Néron-Tate-Höhenpaarung ausrechnen. Pari benutzt zur Berechnung die Definition 3.3.

Zuerst initialisiert man die Kurve 400H1

$$E : y^2 = x^3 + 5x + 10$$

durch den Aufruf

```
? E=ellinit([0,0,0,5,10])
%1 = [0, 0, 0, 5, 10, 0, 10, 40, -25, -240, -8640, -51200, 270,
[-1.423318344753072083963754925, 0.7116591723765360419818774623
- 2.553306940593505831943371823*I, 0.7116591723765360419818774623
+ 2.553306940593505831943371823*I]~, 2.529210762058026757259160942,
-1.264605381029013378629580471 + 0.9040537658513444581738463815*I,
-1.839128198367664539595128066 + 1.673327457 E-29*I,
0.9195640991838322697975640329 - 1.899510906437166410022263655*I,
2.286542514070307804202637423]
```

wobei Pari sofort einige wichtige Informationen über die Kurve zurückgibt, wie z.B. die Diskriminante  $\Delta = -51200 = 2^{11} \cdot 5^2$ .

Als nächstes definieren wir unsere Punkte

```
? S0=[1,4]
%2 = [1, 4]
? S1=[6,16]
%3 = [6, 16]
? S3=[1,-4]
%4 = [1, -4]
? S6=[6,-16]
%5 = [6, -16]
? Si=[0]
%6 = [0]
```

Die Divisoren können wir jetzt nicht einfach so eingeben, aber durch den Morphismus von der Divisorengruppe auf die Kurve können wir dem Divisor  $D_{ij}$  den Punkt  $S_i - S_j$  zuordnen. Mit Pari können wir Punkt auf der Kurve auch subtrahieren.

```
? D01 = ellsub(E,S0,S1)
%7 = [9, 28]
```

Wir wollen jetzt das aber nicht für jeden Divisor ausrechnen, sondern berechnen jetzt direkt die Néron-Tate-Höhenpaarung, z.B.

```
? ellbil(E,ellsub(E,S0,S1),ellsub(E,S3,S6))  
%8 = -1.155375566514457821559583314
```

Jetzt kann man natürlich die Divisoren durchtauschen und erhält so die Werte für die Néron-Tate-Höhenpaarung. Zusammengefasst stehen diese Werte in Tabelle 4 auf Seite 87.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{NT}^a$	$S_{01}$	$S_{03}$	$S_{06}$	$S_{0\infty}$	$S_{13}$	$S_{16}$	$S_{1\infty}$	$S_{36}$	$S_{3\infty}$	$S_{6\infty}$
$S_{01}$								-1, 155376	0, 385125	1, 540501
$S_{03}$						2, 054001	1, 027001			-1, 027001
$S_{06}$					3, 209377		2, 567501		-0, 641875	
$S_{0\infty}$					0, 641875	1, 027001		0, 385125		
$S_{13}$			3, 209377	0, 641875						-2, 567501
$S_{16}$		2, 054001		1, 027001					-1, 027001	
$S_{1\infty}$		1, 027001	2, 567501					1, 540501		
$S_{36}$	-1, 155376			0, 385125			1, 540501			
$S_{3\infty}$	0, 385125		-0, 641875			-1, 027001				
$S_{6\infty}$	1, 540501	-1, 027001			-2, 567501					

Tabelle 4: Die Werte der Néron-Tate-Höhenpaarung<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Berechnet mit Pari

### 5.3 Relationen der Néron-Tate-Höhe

Nach Elkies [El] gilt, dass die elliptische Kurve 400H1 Rank 1 hat und dass die Gruppe der rationalen Punkte von  $S_0$  erzeugt wird. Diese Tatsache impliziert, dass die Néron-Tate-Höhe eines Spitzendivisors ein Vielfaches der kanonischen Höhe von  $S_0$  ist.

**Satz 5.2** *Es gibt ein  $m_{ijkl} \in \mathbb{Z}$ , sodass*

$$\langle S_{ij}, S_{kl} \rangle_{NT} = -m_{ijkl} ht_{NT}(S_0)$$

**Beweis** Durch Nachrechnen bekommt man

$$S_1 = [4]S_0, S_3 = [-1]S_0, S_6 = [-4]S_0 \text{ und } S_\infty = [0]S_0.$$

Sei jetzt  $S : \text{Div}(E) \rightarrow E$  die gewöhnliche Summationsabbildung

$$S(D) = S\left(\sum n_i P_i\right) = \sum [n_i]P_i, \text{ für } D \in \text{Div}(E).$$

Also gibt es Zahlen  $m_{ij}$ , sodass

$$S(S_{ij}) = [m_{ij}]S_0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \langle S_{ij}, S_{kl} \rangle_{NT} \\ &= \frac{1}{2} (\langle (S_{ij} + S_{kl}), (S_{ij} + S_{kl}) \rangle_{NT} - \langle S_{ij}, S_{ij} \rangle_{NT} - \langle S_{kl}, S_{kl} \rangle_{NT}) \\ &= \frac{1}{2} (h_c(S(S_{ij} + S_{kl})) - h_c(S(S_{ij})) - h_c(S(S_{kl}))) \\ &= \frac{1}{2} (h_c([m_{ij} + m_{kl}]S_0) - h_c([m_{ij}]S_0) - h_c([m_{kl}]S_0)) \\ &= \frac{1}{2} (-m_{ij}^2 - m_{kl}^2 + (m_{ij} + m_{kl})^2 \cdot h_c(S_0)) \\ &= m_{ij} \cdot m_{kl} \cdot h_c(S_0) \end{aligned}$$

Mit  $m_{ijkl} = m_{ij} \cdot m_{kl}$  folgt der Satz. □

Für die Néron-Tate-Höhe von  $S_0$  ergibt sich mit Pari ungefähr 0,128375.

Der Beweis von Satz 5.2 liefert eine Formel zur Berechnung der  $m_{ijkl}$ . So ergibt sich für den Divisor  $D_{01}$

$$S(D_{01}) = S(S_0 - S_1) = S(S_0 - 4S_0) = S_0 + [-4]S_0 = [-3]S_0,$$

also ist  $m_{01} = -3$ . Analog ergibt sich für den Divisor  $D_{36}$

$$S(D_{36}) = S(S_3 - S_6) = S(-S_0 + 4S_0) = [-1]S_0 + [4]S_0 = [3]S_0,$$

also ist  $m_{36} = 3$ . Damit folgt

$$m_{0136} = m_{01} \cdot m_{36} = -3 \cdot 3 = -9$$

Die restlichen  $m_{ijkl}$  findet man in Tabelle 6 auf Seite 91. Diese Zahlen benutzen wir im nächsten Abschnitt um die Ergebnisse zu normalisieren.



## 5.4 Ein Beispiel zu Satz 3.37

Wir haben jetzt alle Rechnungen zu unserem Beispiel vollendet und fassen die gesammelten Ergebnisse in einer Tabelle zusammen:

- a) *Nr.*, eine fortlaufende Nummer zu Identifizierung.
- b)  $\mathcal{S}_1$ , der erste Spitzendivisor.
- c)  $\mathcal{S}_2$ , der zweite Spitzendivisor.
- d)  $(\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)_{alg}$ , der algebraische Anteil der Schnittzahl. Wie berechnet in Kapitel 4
- e)  $(\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)_\infty$ , der analytische Anteil auf 6 Stellen gerundet. Die Zahlen wurden berechnet von A. Posingies (siehe Abschnitt 5.1).
- f)  $-(\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)$ , die negative Arakelov-Schnittzahl, also das negative der Summe vom algebraischen und analytischen Anteil, d.h.  $-((\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)_{alg} + (\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)_\infty)$ .
- g) *Differenz*, Die Abweichung der Arakelov-Schnittzahl von der mit Pari berechneten Néron-Tate-Höhe.

Die zusammengestellten Ergebnisse kann man Tabelle 5 auf Seite 90 entnehmen.

Mit dem Ergebnis aus Abschnitt 5.3 können wir die Zahlen noch normalisieren. Wir betrachten anstatt der negativen Arakelov-Schnittzahl die negative Arakelov-Schnittzahl geteilt durch  $m_{ijkl}$ , den wir in der Tabelle 6 auf Seite 91 als Quotient bezeichnen.

## 5.5 Schlusswort

Man kann sagen, dass die Ergebnisse sehr zufriedenstellend sind. Der Vergleich mit den Werten von Pari zeigt, dass die analytischen Werte, deren Genauigkeit wir nicht abschätzen können, akzeptabel genau sind.

Zum Abschluss möchte ich darauf hinweisen, dass man für elliptische Kurven einfachere Methoden, als die hier benutzte Berechnung durch Arakelov-Schnittzahlen, hat um die Néron-Tate-Höhenpaarung zu bestimmen. So kann man wie oben benutzt die Höhe mit Pari gut annähern. Für Kurven vom Geschlecht größer als eins ist das aber nicht mehr möglich. Im Gegensatz dazu lässt sich die in Kapitel 3 vorgestellte Methode auf Kurven höheren Geschlechts verallgemeinern.

<i>Nr.</i>	$S_1$	$S_2$	$(S_1 \cdot S_2)_{alg}$	$(S_1 \cdot S_2)_\infty$	$-(S_1 \cdot S_2)$	<i>Differenz</i>
1	$S_{01}$	$S_{36}$	$\frac{25}{4} \log(2) - 2 \log(5)$	0.040391	-1.153685	-0.001691
2	$S_{03}$	$S_{16}$	$-2 \log(5)$	1.163871	2.055005	-0.001004
3	$S_{06}$	$S_{31}$	$\frac{25}{4} \log(2)$	-1.123480	-3.208690	-0.000687
4	$S_{01}$	$S_{3\infty}$	$\frac{5}{4} \log(2) - \log(5)$	0.357240	0.385764	-0.000639
5	$S_{03}$	$S_{1\infty}$	$-\log(5)$	0.581936	1.027502	-0.000501
6	$S_{0\infty}$	$S_{31}$	$\frac{5}{4} \log(2)$	-0.224696	-0.641738	-0.000137
7	$S_{01}$	$S_{\infty 6}$	$5 \log(2) - \log(5)$	-0.316848	-1.539450	-0.001051
8	$S_{0\infty}$	$S_{16}$	$-\log(5)$	0.581936	1.027502	-0.000501
9	$S_{06}$	$S_{\infty 1}$	$5 \log(2)$	-0.898784	-2.566951	-0.000550
10	$S_{0\infty}$	$S_{36}$	$\frac{5}{4} \log(2) - \log(5)$	0.357240	0.385764	-0.000639
11	$S_{03}$	$S_{\infty 6}$	$-\log(5)$	0.581936	1.027502	-0.000501
12	$S_{06}$	$S_{3\infty}$	$\frac{5}{4} \log(2)$	-0.224696	-0.641738	-0.000137
13	$S_{\infty 1}$	$S_{36}$	$5 \log(2) - \log(5)$	-0.316848	-1.539450	-0.001051
14	$S_{\infty 3}$	$S_{16}$	$-\log(5)$	0.581936	1.027502	-0.000501
15	$S_{\infty 6}$	$S_{31}$	$5 \log(2)$	-0.898784	-2.566951	-0.000550

Tabelle 5: Die zusammengestellten Ergebnisse

<i>Nr.</i>	$S_{ij}$	$S_{kl}$	$m_{ijkl}$	Quotient
1	$S_{01}$	$S_{36}$	-9	0.128187
2	$S_{03}$	$S_{16}$	16	0.128438
3	$S_{06}$	$S_{31}$	-25	0.128348
4	$S_{01}$	$S_{3\infty}$	3	0.128588
5	$S_{03}$	$S_{1\infty}$	8	0.128438
6	$S_{0\infty}$	$S_{31}$	-5	0.128348
7	$S_{01}$	$S_{\infty 6}$	-12	0.128288
8	$S_{0\infty}$	$S_{16}$	8	0.128438
9	$S_{06}$	$S_{\infty 1}$	-20	0.128348
10	$S_{0\infty}$	$S_{36}$	3	0.128588
11	$S_{03}$	$S_{\infty 6}$	8	0.128438
12	$S_{06}$	$S_{3\infty}$	-5	0.128348
13	$S_{\infty 1}$	$S_{36}$	-12	0.128288
14	$S_{\infty 3}$	$S_{16}$	8	0.128438
15	$S_{\infty 6}$	$S_{31}$	-20	0.128348

Tabelle 6: Die zusammengestellten Ergebnisse II

## Abbildungsverzeichnis

1	Eine Beispielaufblasung . . . . .	23
2	Die Faser über (2) der Kurve $E$ aus Beispiel 1.32 nach dem ersten Aufblasen.	27
3	Die Aufblasung der Karte 1 aus Beispiel 1.32 . . . . .	29
4	Die Faser über (2) der Kurve $E$ aus Beispiel 1.32 nach der Aufblasung . .	29
5	Beispiel einer Spitze ( $C_1 : y^2 = x^3$ ) und eines Knotens ( $C_2 : y^2 = x^2(x + 1)$ )	39
6	Die Faser über (2) des minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve $E$ aus Beispiel 2.26 . . . . .	43
7	Die Kodaira Klassifikation für die speziellen Fasern . . . . .	46
8	Die Fasern des Weierstraßmodells der Kurve 400H1 . . . . .	62
9	Die Karte $\mathcal{W}_0$ . . . . .	63
10	Die Aufblasung der Karte $W_0$ . . . . .	66
11	Die Aufblasung der Karte $W_1$ . . . . .	67
12	Die Aufblasung der Karte $W_2$ . . . . .	69
13	Die Aufblasung der Karte $W_3$ . . . . .	70
14	Die Aufblasung der Karte $W_4$ . . . . .	71
15	Die Faser $\mathcal{C}_{(2)}$ des minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve 400H1 . . . . .	71
16	Die Schnittpunkte der Zariski-Abschlüsse mit den Komponenten der Faser über 2 . . . . .	75
17	Die assoziierten Divisoren auf dem minimalen, regulären, eigentlichen Modells der Kurve 400H1 . . . . .	76

## Tabellenverzeichnis

1	Die Schnittpunkte der Divisoren mit den Komponenten der Faser über 2 .	75
2	Die algebraischen Schnittzahlen. $l_2 = \log(2)$ , $l_5 = \log(5)$ . . . . .	82
3	Die analytischen Schnittzahlen <sup>a</sup> . . . . .	84
4	Die Werte der Néron-Tate-Höhenpaarung <sup>a</sup> . . . . .	87
5	Die zusammengestellten Ergebnisse . . . . .	90
6	Die zusammengestellten Ergebnisse II . . . . .	91

## Literatur

- [Ar] *S. J. Arakelov*: An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), 1179–1192.
- [Bi] *B. Birch*: Noncongruence subgroups, covers and drawings. The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993). *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **200**. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, 25–46.
- [Co] *B. Conrad*: Minimal models for elliptic curves. unpublished notes, <http://www.math.lsa.umich.edu/~bdconrad/papers/minimalmodel.pdf>, 2005.
- [Cr] *J. E. Cremona*: Algorithms for modular elliptic curves. Second ed.. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [El] *N. D. Elkies*: *ABC* implies Mordell. *Internat. Math. Res. Notices* (1991), 99–109.
- [Ha] *R. Hartshorne*: Algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hr] *P. Hriljac*: Heights and Arakelov's intersection theory. *Amer. J. Math.* **107** (1985), 23–38.
- [KS] *L. Khadjavi, V. Scharaschkin*: Belyi maps and elliptic curves. <http://myweb.lmu.edu/lkhadjavi/>.
- [Kü1] *U. Kühn*: Generalized arithmetic intersection numbers. *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), 209–236.
- [Kü2] *U. Kühn*: Néron-Tate heights on algebraic curves and subgroups of the modular group. *Manuscripta Math.* **116** (2005), 401–419.
- [La] *S. Lang*: Introduction to Arakelov theory. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Li] *Q. Liu*: Algebraic geometry and arithmetic curves. Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**. Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.
- [Ma] *H. Matsumura*: Commutative algebra. Second ed.. Mathematics Lecture Note Series **56**. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
- [Po] *A. Posingies*: Belyi-morphismen und konstante koeffizienten von nicht-holomorphen eisensteinreihen. Diplomarbeit. HU Berlin, 2007, <http://www.math.uni-hamburg.de/home/kuehn/diplom-posingies.pdf>, 2007.
- [Se] *J.-P. Serre*: Lectures on the Mordell-Weil theorem. Third ed.. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997, Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre.
- [Si1] *J. H. Silverman*: The arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics **106**. Springer-Verlag, New York, 1992, Corrected reprint of the 1986 original.

- [Si2] *J. H. Silverman: Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. Graduate Texts in Mathematics 151. Springer-Verlag, New York, 1994.*