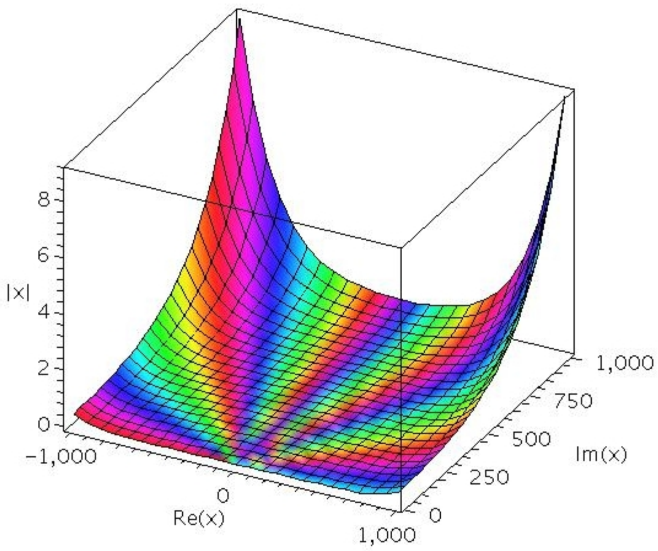
Periodenrelationen und der Satz von Haberland

Bachelorarbeit

Matthias Bargmann

Eingereicht am 24. September 2009



Periodenpolynom einer Spitzenform

1. Gutachter: Prof. Dr. Ulf Kühn

2. Gutachter: PD Dr. Ernst Kleinert

Dept. Mathematik, Uni-Hamburg

Erklärung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel – insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen – benutzt. Die Arbeit habe ich vorher nicht in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht. Die eingereichte schriftliche Fassung entspricht genau der auf dem elektronischen Speichermedium.

Matthias Bargmann

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Modulformen, oder genauer die Fourierkoeffizienten von Modulformen, haben unter anderem in der Zahlentheorie eine große Bedeutung. Diese Arbeit behandelt im Wesentlichen die Verbindung zwischen dem Vektorraum der Spitzenformen und dem der Periodenpolynome.

Es wird keinerlei Grundlagenwissen über die Theorie der Modulformen vorausgesetzt. Deshalb wird zunächst im ersten Kapitel eine grobe Einführung in Modulformen gegeben, wie sie zum weiteren Verständnis dieser Arbeit gebraucht wird.

Im zweiten Kapitel werden Perioden und Periodenpolynome definiert und der sie enthaltende Vektorraum genauer untersucht. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit besteht in der vollständigen Ausführung eines analytischen Beweises [8] des Satzes von Haberland [2]. Es wird mit dessen Hilfe die Injektivität der natürlichen Abbildung von den Spitzenformen auf die Periodenpolynome gezeigt und damit die Verbindung der beiden Vektoräume in Form eines konkreten Isomorphismus hergestellt.

Insbesondere bedeutet diese Verbindung, dass alle Informationen, die in den (unendlich vielen) Fourierkoeffizienten der Spitzenformen enthalten sind, auf die (endlich vielen) Koeffizienten der zugehörigen Periodenpolynome abgebildet werden.

2 Kurzeinführung Modulformen

Mit der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$ lässt sich eine Operation auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ wie folgt definieren:

$$\begin{gathered}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\end{gathered}$$

Proposition 2.1: Diese Operation ist wohldefiniert.

Beweis: Sei $z := x + iy \in \mathbb{H}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wegen $ad - bc = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{a(x+iy)+b}{cz+d} - \frac{a(x-iy)+b}{c\overline{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{ax+aiy+b}{cz+d} - \frac{ax-aiy+b}{c\overline{z}+d}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{ax^2c+axd+acy^2+aiyd+bcx-bciy+bd}{|cz+d|^2}\right. \\
&\quad \left. - \frac{ax^2c+axd+ay^2c-aiyd+bcx+bciy+bd}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{2iayd-2ibcy}{|cz+d|^2}\right) \\
&= \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{y}{|cz+d|^2} \\
&= \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung wohldefiniert.

Offensichtlich gilt auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(z) = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass für alle $\gamma, \gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\gamma(\gamma'(z)) = (\gamma\gamma')(z)$$

Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Durch Ausrechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\gamma(\gamma'(z)) &= \frac{a \cdot \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + b}{c \cdot \left(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}\right) + d} \\
&= \frac{\frac{aa'z+ab'+bc'z+bd'}{c'z+d'}}{\frac{ca'z+cb'+dc'z+dd'}{c'z+d'}} \\
&= \frac{(aa'z + ab' + bc'z + bd')(c'z + d')}{(ca'z + cb' + dc'z + dd')(c'z + d')} \\
&= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\
&= \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right)(z) = (\gamma\gamma')(z)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2: Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird von den beiden Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

Beweis: Siehe etwa [4, Kap. II §2]. □

Die Definition der Gruppenoperation lässt sich auf Funktionen erweitern.

Definition 2.3: Gegeben $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} |_k : \mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\to \mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ \left(f(z), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &\mapsto \left(f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z) = (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

den **Slashoperator** von Gewicht k.

Bemerkung: Es gilt

$$f|_k(\gamma\gamma') = (f|_k\gamma)|_k\gamma'.$$

Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen wie in Proposition 2.1.

Definition 2.4: Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(*i*) f ist meromorph,

(*ii*) $f = f|_k\gamma$ für alle $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

(*iii*) f hat eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

heisst **Modulform** vom Gewicht k.

Notation: Im Folgenden schreiben wir abkürzend für $e^{2\pi i n z}$ immer q^n.

Offensichtlich bilden die Modulformen vom Gewicht k einen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir bezeichnen ihn mit M_k.

Als wichtiges Beispiel für Modulformen seien hier die Eisensteinreihen G_k erwähnt.

$$G_k(z) := \frac{(k-1)!}{2(2\pi i)^k} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

Bemerkung:

(*i*) $G_k(z)$ ist Modulform vom Gewicht k.

(*ii*) Die Eisensteinreihen $G_k(z)$ konvergieren für $k \geq 4$.

(*iii*) Der graduierte Ring $\bigoplus_{k\geq 0} M_k$ wird von den Eisensteinreihen G_4 und G_6 erzeugt. Es gilt also

$$\bigoplus_{k\geq 0} M_k = \mathbb{C}[G_4, G_6].$$

Beispiel: Es ist $G_8 = 120 \cdot G_4^2$.

Definition 2.5: Eine Modulform f von Gewicht k mit $\lim_{y\to\infty} f(iy) = 0$ heisst **Spitzenform** vom Gewicht k. Den Vektorraum der Spitzenformen bezeichnen wir mit S_k.

Beispiel: Die Delta-Funktion, gegeben durch

$$\Delta(z) := q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24},$$

ist eine Spitzenform vom Gewicht 12.

Bemerkung: Die Multiplikation mit der Deltafunktion ist ein Isomorphismus von M_k nach S_{k+12}.

Bemerkung: Für den konstanten Koeffizienten a_0 der Fourierreihe einer Modulform f gilt $a_0 = \lim_{y\to\infty} f(iy)$. Insbesondere gilt also für jede Spitzenform $a_0 = 0$.

Definition 2.6: Eine Menge von genau einem Repräsentanten aus jedem

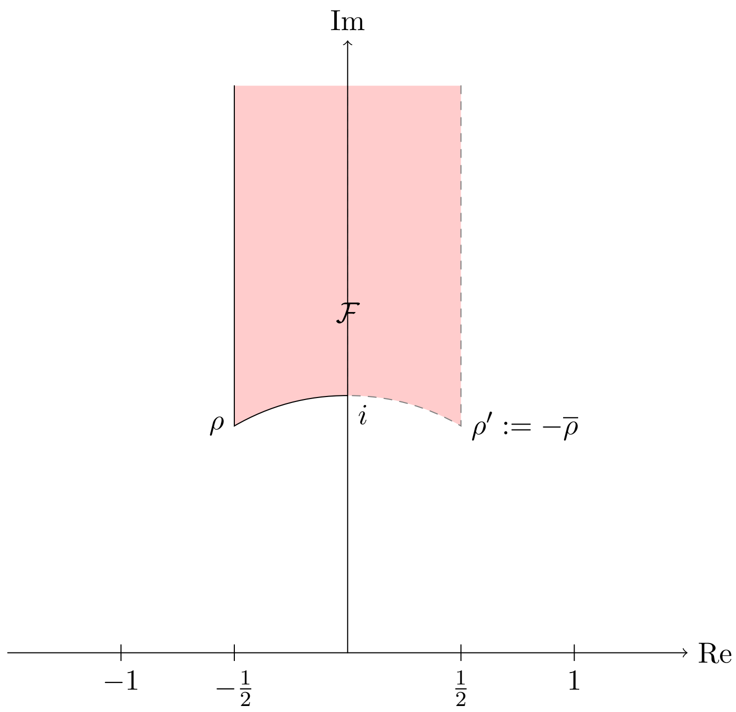


Abbildung 1: Fundamentalbereich von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Orbit unter der Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ nennen wir **Fundamentalbereich**.

Bemerkung: In der Regel verlangt man in dieser Definition zusätzlich noch Zusammenhang und Meßbarkeit der Menge.

Bemerkung: Wenn wir von *dem* Fundamentalbereich der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sprechen, meinen wir in dieser Arbeit die zusammenhängende und meßbare Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > 1, 0 < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2} \right\}.$$

Satz 2.7 (k/12 - Formel): Sei $f \in M_k$, $f \neq 0$, dann gilt

$$\mathrm{ord}(f; i\infty) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ord}(f; i) + \frac{1}{3}\,\mathrm{ord}(f; \rho) + \sum_{\substack{z \in \mathcal{F} \\ z \neq i, \rho}} \mathrm{ord}(f; z) = \frac{k}{12}.$$

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Residuensatzes. Siehe etwa [1, Kap. VI 2.3.]. □

Korollar 2.8: Mit der Bezeichnung $[x] := n$ mit $n \in \mathbb{Z}, n \leq x$ und $n+1 > x$ gilt

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\dim S_k = \dim M_{k-12}.$$

Beweis: Siehe etwa [4, Kap. III §4]. □

Definition 2.9: Sei $f \in M_k$ und $f(z) = \sum a_n q^n$ die Fourierentwicklung von f. Dann heisst

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

die **L-Reihe** zur Modulform f.

Bemerkung: Die L-Reihe entsteht durch eine sogenannte Mellin Transformation aus der Modulform f.

Lemma 2.10: Sei $f \in S_k$, dann hat $L(f, s)$ eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und die Funktion

$$L^*(f, s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f, s)$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$L^*(f, s) = (-1)^{\frac{k}{2}} L^*(f, k - s).$$

Beweis: Siehe etwa [9, Thm. 4 (ii)]. □

Bemerkung: Falls f eine sogenannte Heckeeigenform ist, so hat $L^*(f,s)$ ein Eulerprodukt und ist eine sogenannte motivische L-Reihe.

Definition 2.11: Sind $f, g \in S_k$, so wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{dx\,dy}{y^2}$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf S_k gegeben. Dies wird auch **Petersson-Skalarprodukt** genannt.

Satz 2.12: Das Petersson-Skalarprodukt ist nicht ausgeartet.

Beweis: Siehe etwa [4, Kap. IV §3]. $\square$

3 Perioden von Modulformen

Definition 3.1: Sei $f \in S_k$, dann heisst

$$r_n(f) := \int_0^{i\infty} f(z) z^n \, dz$$

die n**-te Periode** von f.

Proposition 3.2: Sei $f \in S_k$, dann gilt

$$r_n(f) := i^{n+1} L^*(f, n+1).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_0^{i\infty} f(z) z^n \, dz &= \int_0^{\infty} f(it)(it)^n \, i dt \\ &= i^{n+1} \left(\int_0^{\infty} f(it) t^s \frac{dt}{t} \right) \Bigg|_{s=n+1} \\ &= i^{n+1} L^*(f, s) \qquad \text{(Mellin-Transformation MF} \leftrightarrow \text{L-Reihe)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Diese Gleichung zeigt, dass wir spezielle Werte der L-Reihe an den ganzzahligen Punkten erhalten.

Definition 3.3: Sei $f \in S_k$, dann heisst

$$r(f)(X) = \int_0^{i\infty} f(z)(z - X)^{k-2} \, dz$$

das **Periodenpolynom** von f.

Bemerkung: Durch Ausrechnen folgt

$$r(f)(X) = \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n} r_n(f) X^{k-2-n}.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Koeffizienten durch die speziellen Werte der L-Reihe $L^*(f,s)$ gegeben sind.

Im Folgenden wollen wir den Raum der Periodenpolynome untersuchen. Offensichtlich ist $r(f)$ ein Polynom höchstens vom Grad $k-2$. Also gilt

$$r(f) \in V_k := \{p \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(p) \leq k-2\}.$$

Lemma 3.4: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert vermöge $|_{2-k}$ auf V_k.

Bemerkung: Wir folgen hier der Notation in [9]. In [8] wird eine andere Operation verwendet.

Beweis: Sei $f \in S_k$, dann ist $r(f)$ als Polynom insbesondere in $\mathrm{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ enthalten. Wir können also den Slashoperator in gewohnter Weise anwenden. Es gilt für $X^\ell \in V_k$, $0 \leq \ell \leq k-2$

$$\begin{aligned} X^\ell|_{2-k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (cX+d)^{k-2}\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right)^\ell \\ &= (cX+d)^{k-2-\ell}\,(aX+b)^\ell. \end{aligned}$$

Also ist

$$\deg\left(X^\ell|_{2-k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \leq k-2.$$

Offensichtlich ist $|_{2-k}$ auch eine lineare Abbildung, denn mit $r_1, r_2 \in V_k$ gilt

$$(r_1+r_2)|_{2-k}\gamma = r_1|_{2-k}\gamma + r_2|_{2-k}\gamma.$$

□

Notation: Bei Polynomen $p \in V_k$ schreiben wir im Folgenden abkürzend für

$p|_{2-k}\gamma$ nur noch $p|\gamma$.

Proposition 3.5: Sei $f \in S_k$ und $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dann gilt

$$(r(f)|\gamma)(X) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(\infty)} f(z)(z-X)^{k-2}\,dz.$$

Beweis: Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(r(f)|\gamma)(X) &= \int_0^\infty f(z)(cz+d)^{k-2}\left(\frac{az+b}{cz+d}-X\right)^{k-2} dz \\
&= \int_0^\infty f(z)(cz+d)^{k}\left(\frac{az+b}{cz+d}-X\right)^{k-2} \frac{dz}{(cz+d)^2} \\
&= \int_0^\infty f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\left(\frac{az+b}{cz+d}-X\right)^{k-2} d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
&= \int_{\gamma(0)}^{\gamma(\infty)} f(u)(u-X)^{k-2}\,du \qquad \text{mit } u = \frac{az+b}{cz+d}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vermöge $|$ auf V_k setzt sich zu einer Wirkung von $\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$ auf V_k fort. Ist $\sum a_m[M] \in \mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$, $p(X) \in V_k$, so ist

$$\left(p|\sum a_m[M]\right)(X) = \sum a_m \cdot (p|M)(X).$$

Proposition 3.6: Es gilt für alle $f \in S_k$

$$r(f)|(1+S) = r(f)|(1+U+U^2) = 0 \qquad \text{mit } S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Mit Proposition 3.5 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left(r(f)|(1+S)\right)(X) &= r(f)(X) + \left(r(f)|S\right)(X) \\
&= \int_0^\infty f(z)(z-X)^{k-2}\,dz + \int_{S(0)}^{S(\infty)} f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&= \int_0^\infty f(z)(z-X)^{k-2}\,dz + \int_\infty^0 f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

und mit $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned}
\big(r(f)|(1+U+U^2)\big)(X) &= r(f)(X) + \left(r(f)|U\right)(X) + \big(r(f)|U^2\big)(X) \\
&= \int_0^\infty f(z)(z-X)^{k-2}\,dz + \int_{U(0)}^{U(\infty)} f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&+ \int_{U^2(0)}^{U^2(\infty)} f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&= \int_0^\infty f(z)(z-X)^{k-2}\,dz + \int_\infty^1 f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&+ \int_1^0 f(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Betrachten wir das Beispiel

$$I + S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})].$$

Sei nun $r(f)$ Periodenpolynom einer Spitzenform $f \in S_k$, dann gilt

$$\begin{aligned} r(f)|\left(I+S\right)(X) &= r(f)(X) + (r(f)|S)(X) \\ &= \int\limits_0^\infty f(z)(X-t)^{k-2}\,dz + \int\limits_{S(0)}^{S(\infty)} f(z)(X-t)^{k-2}\,dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aber es gilt auch

$$\begin{aligned} X|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} &= X + X^{k-2}\frac{0-1}{1X-0} \\ &= X - X^{k-1}. \end{aligned}$$

Also ist das Polynom $X \in V_k$ niemals Periodenpolynom einer Spitzenform. Nach der Dimensionsformel 2.8 war schon klar, dass der Raum der Periodenpolynome ein echter Unterraum von V_k ist. Wir wollen nun diesen Unterraum genauer untersuchen und insbesondere seine Dimension bestimmen.

Definition 3.7: Es bezeichne

$$W_k = \left\{p(X) \in V_k \;\middle|\; p|(1+S) = p|(1+U+U^2) = 0\right\}.$$

Wir wissen nun aus Proposition 3.6, dass $r(S_k) \subset W_k$. Wir wollen die Abbildung $r : S_k \to W_k$ nun genauer studieren.

Wir haben eine Involution auf V_k gegeben:

$$p(X) \mapsto p(-X)$$

und somit eine Zerlegung in gerade und ungerade Polynome

$$V_k = \underbrace{V_k^+}_{p(X)=p(-X)} \oplus \underbrace{V_k^-}_{p(X)=-p(-X)}.$$

Entsprechend zerlegen wir auch $W_k = W_k^+ \oplus W_k^-$. Diese Zerlegung ist immer möglich. S_k hat eine Basis mit reelen Koeffizienten. Hat nun f auch nur reele Koeffizienten, so kann man an der Definition 3.1 der Perioden ablesen, dass die geraden Perioden $r_{2n}(f)$ rein imaginär und die ungeraden Perioden $r_{(2n+1)}$ reel sind. Die Bedingung aus Definition 3.7 für W_k ist also auch für $W_k^{\pm}$ erfüllt.

Für $f \in S_k$ schreiben wir entsprechend dieser Zerlegung $r(f) = r^+(f) + r^-(f)$.

Proposition 3.8 (Periodenrelationen): Sei $f \in S_k$ und $r_n(f) = \int_0^{i\infty} f(z)z^n\,dz$ die n-te Periode von f, dann gelten die folgenden Periodenrelationen:

(*i*)

$$r_n(f) + (-1)^n r_{n-k-2}(f) = 0$$

(*ii*)

$$r_n(f) + (-1)^n \sum_{\substack{0\le i\le n\\ i\equiv 0 \mod 2}} \binom{n}{i} r_{k-2-n+i}(f) + (-1)^n \sum_{\substack{0\le i\le k-2-n\\ i\equiv k \mod 2}} \binom{k-2-n}{i} r_i(f) = 0$$

(*iii*)

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\equiv 1 \mod 2}} \binom{n}{i} r_{k-2-n+i}(f) + \sum_{\substack{0\le i\le k-2-n\\ i\not\equiv k \mod 2}} \binom{k-2-n}{i} r_i(f) = 0$$

Beweis: Sei $f \in S_k, p \in V_k$ und $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma(0)}^{\gamma(i\infty)} f(z)p(z)\,dz &= \int_0^{i\infty} f(\gamma z)p(\gamma z)\,d(\gamma z)\\
&= \int_0^{i\infty} (cz+d)^k f(z)(cz+d)^{2-k}(p|\gamma)(z)\,\frac{dz}{(cz+d)^2}\\
&= \int_0^{i\infty} f(z)(p|\gamma)(z)\,dz
\end{aligned}$$

Für die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt $S^4 = U^3 = I$ und $S^2 = -I$ operiert auch schon trivial. Damit haben wir

$$\int\limits_0^{i\infty} f(z)p(z)\,dz + \int\limits_{S(0)}^{S(i\infty)} f(z)p(z)\,dz = 0$$

und

$$\int\limits_0^{i\infty} f(z)p(z)\,dz + \int\limits_{U(0)}^{U(i\infty)} f(z)p(z)\,dz + \int\limits_{U^2(0)}^{U^2(i\infty)} f(z)p(z)\,dz = 0.$$

Setzen wir $p(z) := z^n$ in den beiden Gleichungen und benutzen die Identität

$$z^n|S = (-1)^n z^{k-2-n}$$

erhalten wir (*i*).

Um (*ii*) und (*iii*) zu erhalten, benutzen wir die Identitäten

$$\begin{aligned} z^n|U &= z^{k-2-n}(z-1)^n \\ z^n|U^2 &= (-1)^n(z-1)^{k-2-n} \end{aligned}$$

und betrachten

$$\begin{aligned} &z^n + z^n|U + z^n|U^2 \\ =&z^n + z^{k-2-n}(z-1)^n + (-1)^n(z-1)^{k-2-n} \\ =&z^n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n+i} z^{k-2-n+i} + \sum_{i=0}^{k-2-n} \binom{k-2-n}{i}(-1)^i z^i \end{aligned}$$

Die Gleichung unterscheidet sich von (*ii*) bzw. (*iii*) nur darin, dass wir über alle Summanden, anstatt nur über die geraden bzw. ungeraden, summieren.

S_k hat eine reelle Basis (mit reellen Koeffizienten). Aber wenn f auch reelle Koeffizienten hat, dann haben die ungeraden Perioden $r_{2n+1}(f)$ alle reelle und die geraden Perioden $r_{2n}(f)$ rein imaginäre Koeffizienten. Damit zerfällt obige Gleichung in (*ii*) und (*iii*). $\square$

Beispiel: Sei $f := \Delta = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \in S_{12}$. Wir erhalten aus den Periodenrelationen 3.8

$$\begin{aligned}
L(\Delta,1) &= L(\Delta,11)\\
L(\Delta,2) &= L(\Delta,10)\\
L(\Delta,3) &= L(\Delta,9)\\
48 \cdot L(\Delta,4) &= 48 \cdot L(\Delta,8) = 25 \cdot L(\Delta,10)\\
14 \cdot L(\Delta,5) &= 14 \cdot L(\Delta,7) = 9 \cdot L(\Delta,9)\\
12 \cdot L(\Delta,6) &= 5 \cdot L(\Delta,10)
\end{aligned}$$

Damit folgern wir mit der Bermerkung auf Seite 13

$$r^{-}(\Delta)(X) = \frac{5}{2} L(\Delta,10)\left(4(X^9+X) - 25(X^7+X^3) + 42X^5\right).$$

Definition 3.9: Wir definieren eine Bilinearform auf V_k:

$$\langle X^m, X^n \rangle = \begin{cases} (-1)^n \binom{k-2}{n}^{-1} & \text{falls } n+m = k-2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir

$$\left\langle \sum_{n=0}^{k-2} a_n X^n, \sum_{n=0}^{k-2} b_n X^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n}^{-1} a_n b_{k-n-2}.$$

Proposition 3.10: Seien $\varphi, \psi \in V_k$. Dann gilt:

$$\langle \varphi|\gamma, \psi|\gamma \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

Zum Beweis benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.11: Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erfüllt für alle $\varphi \in V_k$ die Gleichung

$$\langle \varphi(X), \psi_t(X) \rangle_1 = \varphi(t) \qquad \text{mit } \psi_t(X) = (X-t)^{k-2} \tag{1}$$

Umgekehrt ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch (1) eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform, die (1) erfüllt. Mit $\varphi(X) = \sum_{n=0}^{k-2} a_n X^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(X), \psi_t(X) \rangle_1 &= \left\langle \sum_{n=0}^{k-2} a_n X^n, \psi_t(X) \right\rangle_1 \\
&= \sum_{n=0}^{k-2} a_n \left\langle X^n, \psi_t(X) \right\rangle_1 \\
&= \sum_{n=0}^{k-2} a_n t^n.
\end{aligned}$$

Wir folgern somit

$$\langle X^n, \psi_t(X) \rangle_1 = t^n$$

und mit der so gewonnenen Gleichung bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle X^n, \psi_t(X) \rangle_1 &= \left\langle X^n, (X-t)^{k-2} \right\rangle_1 \\
&= \left\langle X^n, \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \binom{k-2}{m} X^m t^{k-2-m} \right\rangle_1 \\
&= \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m t^{k-2-m} \binom{k-2}{m} \left\langle X^n, X^m \right\rangle_1 \\
&= t^n.
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir durch Koeffizientenvergleich, dass

$$\langle X^m, X^n \rangle_1 = \begin{cases} (-1)^m \binom{k-2}{m}^{-1} & \text{falls } n = k-2-m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gelten muss und somit $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ $\square$

Beweis (Proposition 3.10): Nach dem Lemma genügt es die Gleichung für den Spezialfall $\psi(X) = \psi_t(X) = (X-t)^{k-2}$ mit $t \in \mathbb{C}$ zu zeigen. Sei im Folgenden $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Wir berechnen zunächst:

$$\begin{aligned}
\psi_t|\gamma &= (cX+d)^{k-2}\left(\frac{aX+b}{cX+d} - t\right)^{k-2} \\
&= (aX+b-t(cX+d))^{k-2} \\
&= (aX+b-tcX-td)^{k-2} \\
&= ((a-tc)X+b-td)^{k-2} \\
&= (a-tc)^{k-2}\left(X + \frac{b-td}{a-tc}\right)^{k-2} \\
&= (a-tc)^{k-2}\left(X - \frac{td-b}{t(-c)+a}\right)^{k-2} \\
&= (a-tc)^{k-2}\psi_{\gamma^{-1}(t)}(X)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi|\gamma, \psi_t|\gamma\rangle &= \left\langle (cX+d)^{k-2}\varphi(\gamma(X)), (a-tc)^{k-2}\psi_{\gamma^{-1}(t)}(X)\right\rangle \\
&= (a-tc)^{k-2}\left\langle (cX+d)^{k-2}\varphi(\gamma(X)), \psi_{\gamma^{-1}(t)}(X)\right\rangle \\
&= (a-tc)^{k-2}(c\gamma^{-1}(t)+d)^{k-2}\varphi(\gamma\gamma^{-1}(t)) \\
&= (a-tc)^{k-2}\left(c\frac{td-b}{-tc+a} + d\right)^{k-2}\varphi(t) \\
&= (a-tc)^{k-2}\left(\frac{tcd-bc}{-tc+a} + d\right)^{k-2}\varphi(t) \\
&= (tcd-bc-tcd+ad)^{k-2}\varphi(t) \\
&= (ad-bc)^{k-2}\varphi(t) \\
&= \varphi(t) = \langle \varphi, \psi_t\rangle
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.12: Es gilt für alle $k \geq 4$

$$\dim W_k = \dim M_k + \dim S_k.$$

Beweis: Wir setzen

$$V^S = \{p \in V_k \mid p|_{2-k}S = p\}$$

und

$$V^U = \{p \in V_k \mid p|_{2-k}U = p\}.$$

Die Matrix S operiert als eine Involution auf V_k, ist somit diagonalisierbar und es ist $V_k = V_k^S \oplus \ker(I + S)$ mit $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Das Minimalpolynom von $U \in \mathrm{End}(V_k)$ ist $(X-1)(X-\omega)(X-\omega^2)$ wobei ω primitive 3-te Einheitswurzel ist. (U ist Nullstelle von (X^3-1)). Somit ist $V_k = V_k^U \oplus \ker(U - \omega I) \oplus \ker(U - \omega^2 I)$.

Weiter gilt für jeden Unterraum $F \subset V_k$, dass $V_k = F \oplus F^\perp$, wobei

$$F^\perp = \{v \in V_k \mid \langle v, f \rangle = 0 \text{ für alle } f \in F\}.$$

Sei $P \in V_k^S$ und $Q \in \ker(I + S)$, so gilt

$$\langle P, Q \rangle = \langle P|S, Q|S \rangle = \langle P, -Q \rangle = -\langle P, Q \rangle.$$

Wir haben also $V_k^S \perp \ker(I + S)$. Analog gilt mit $P \in V_k^U$, $Q \in \ker(U - \omega I)$

$$\langle P, Q \rangle = \langle P|U, Q|U \rangle = \langle P, \omega Q \rangle = \omega \langle P, Q \rangle$$

und somit folgt

$$V_k^U \perp \ker(U - \omega I)$$
$$V_k^U \perp \ker(U - \omega^2 I).$$

Ferner folgern wir

$$\ker(I+U+U^2) = \ker(U-\omega I) \oplus \ker(U-\omega^2 I) = \left(V_k^U\right)^\perp$$

und

$$W_k = \left(V_k^S\right)^\perp \cap \left(V_k^U\right)^\perp = \left(V_k^S + V_k^U\right)^\perp .$$

Es ist $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U^2 S$. Ein Polynom $p \in V_k^S \cap V_k^U$ ist somit 1-periodisch, also konstant. Aber falls $k > 2$ sind die Konstanten nicht unter S invariant, weil dann $p(X) = X^{k-2} p(-\frac{1}{X}) = p|_{k-2} S$ nicht erfüllt ist. Also ist die Summe direkt.

$$\left(V_k^S + V_k^U\right)^\perp = \left(V_k^S \oplus V_k^U\right)^\perp .$$

Insgesamt gilt somit

$$\begin{aligned} \dim W_k &= \dim(V_k^S \oplus V_k^U)^\perp \\ &= \dim V_k - \dim V_k^S - \dim V_k^U . \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\dim V_k^S$.

Die Polynome $s_n(X) = (X-i)^n (X+i)^{k-2-n}$, $n = 0 \dots k-2$ bilden eine Basis von Eigenvektoren für S von V_k und durch Ausrechnen erhält man die Eigenwerte $(-1)^n i^{k-2}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \dim V_k^S &= \# \left\{ n = 0, \dots, k-2 \;\middle|\; (-1)^n i^{k-2} = 1 \right\} \\ &= \# \left\{ n = 0, \dots, k-2 \mid 2n \equiv k-2 \mod 4 \right\} \end{aligned}$$

Durch Abzählen erhalten wir daraus $\dim V_k^S = 1 + 2\left[\frac{k-2}{4}\right]$.

Wir berechnen nun $\dim V_k^U$.

Die Polynome $u_n(X) = (X+\omega)^n(X+\omega^2)^{k-2-n}$, $n = 0, \dots, k-2$ bilden eine Basis von Eigenvektoren für U auf V_k mit Eigenwerten ω^{k-2+n}. Wir folgern somit:

$$\dim V_k^U = \#\left\{ n = 0, \dots, k-2 \;\middle|\; \omega^{k-2+n} = 1 \right\}$$

Durch Abzählen erhalten wir hier $\dim V_k^U = 1 + 2\left[\frac{k-2}{6}\right]$.

Letztendlich erhalten wir für $k \geq 4$ die Formel

$$\begin{aligned}
\dim W_k &= k - 1 - \left(1 + 2\left[\frac{k-2}{4}\right]\right) - \left(1 + 2\left[\frac{k-2}{6}\right]\right) \\
&= \begin{cases} 2\left[\frac{k}{12}\right] + 1 & \text{falls } k \not\equiv 2 \mod 12 \\ 2\left[\frac{k}{12}\right] - 1 & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Wir folgern $\dim W_k = \dim M_k + \dim S_k$. □

Satz 3.13 (Haberland): Sei $k \geq 4$ und $f, g \in S_k$. Dann gilt für das Petersson-Skalarprodukt von f und g die Formel

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \frac{1}{6(2i)^{k-1}} \left\langle r(f)|(T - T^{-1}), \overline{r(g)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{3(2i)^{k-1}} \sum_{\substack{0<m<n<k-2 \\ m \not\equiv n \mod 2}} (-1)^m \binom{k-2}{n} \binom{n}{m} r_{n-2-m}(f) \overline{r_m(g)}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Auf der linken Seite der Gleichung haben wir das Petersson-Skalarprodukt und auf der rechten Seite die Bilinearform auf W_k.

Beweis: Wir modifizieren den Beweis in [8] für die von uns gewählte Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf V_k. (Vgl. die Bemerkung zu Lemma 3.4)

Nach Definition des Petersson-Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int\limits_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \,\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\,(-2i)\,dzd\overline{z} \\ &= -\frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}(z-\overline{z})^{k-2}\,dzd\overline{z}.\end{aligned} \tag{2}$$

Wir definieren

$$F(z) := \int\limits_{z}^{i\infty} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\,d\tau.$$

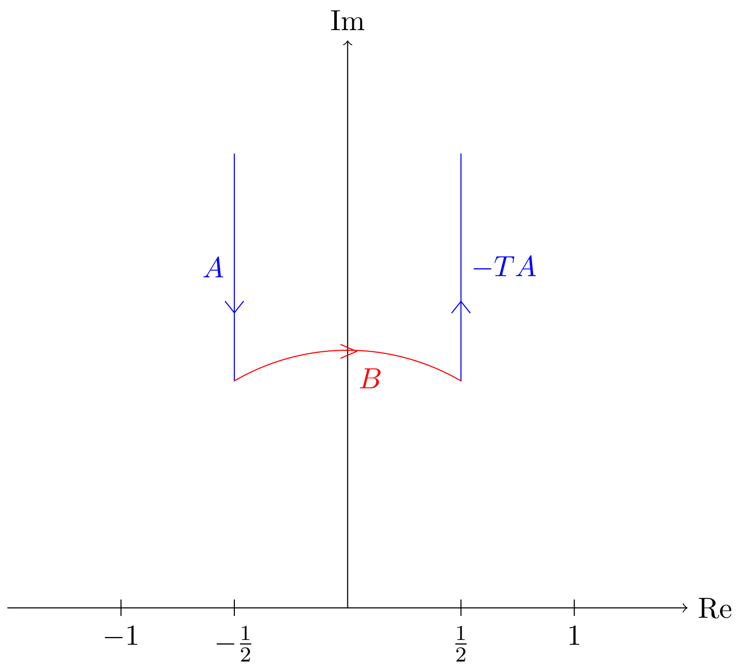
Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}d(F(z)\overline{g(z)}d\overline{z}) &= \frac{\partial}{\partial z}F(z)\overline{g(z)}\,dz\,d\overline{z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}F(z)\overline{g(z)}\,d\overline{z}\,d\overline{z} \\ &= \frac{\partial F(z)}{\partial z}\overline{g(z)}\,dz\,d\overline{z} \\ &= -\overline{g(z)}(z-\overline{z})^{k-2}f(z)\,dz\,d\overline{z}\end{aligned}$$

Wir rechnen weiter bei (2) und erhalten mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}-\frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}(z-\overline{z})^{k-2}\,dz\,d\overline{z} &= \frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{\mathcal{F}} d(F(z)\overline{g(z)}d\overline{z}) \\ &= \frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{\partial\mathcal{F}} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z}.\end{aligned}$$

Wir integrieren nun also über den Rand des Fundamentalbereichs und teilen die Integrationswege wie in der folgenden Abbildung auf:



Da F und g periodisch sind, heben sich die Integrale über A und $-TA$ gegenseitig auf. Es gilt also

$$\frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{\partial\mathcal{F}} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z} = \frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{B} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z}$$

Offensichtlich ist $B = -SB$. Wir integrieren nun zweimal und multiplizieren mit $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2i)^{k-1}} \int\limits_{B} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z} &= \frac{1}{2(2i)^{k-1}} \int\limits_{B-SB} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z} \\ &= \frac{1}{2(2i)^{k-1}} \left(\int\limits_{B} F(z)\overline{g(z)}d\overline{z} - \int\limits_{B} F(Sz)\overline{g(Sz)}d\left(S\overline{z}\right) \right)\end{aligned}$$

und mit $g(Sz) = z^k \cdot g(z)$, $Sz = -\frac{1}{z}$ und $d(S\overline{z}) = \frac{d\overline{z}}{\overline{z}^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(2i)^{k-1}} \left(\int\limits_B F(z)\overline{g(z)} d\overline{z} - \int\limits_B F(-\frac{1}{z}) \overline{z}^{k-2} \overline{g(z)} d\overline{z} \right) \\
&= \frac{1}{2(2i)^{k-1}} \left(\int\limits_B \left(F(z) - \overline{z}^{k-2} F(-\frac{1}{z}) \right) \overline{g(z)} d\overline{z} \right).
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
F(z) - \overline{z}^{k-2} F(-\frac{1}{z}) &= \int\limits_z^{i\infty} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\, d\tau - \overline{z}^{k-2} \int\limits_{-\frac{1}{z}}^{i\infty} (\tau + \frac{1}{\overline{z}})^{k-2} f(\tau)\, d\tau \\
&= \int\limits_z^{i\infty} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\, d\tau - \overline{z}^{k-2} \int\limits_{S(-\frac{1}{z})}^{S(i\infty)} (S\tau + \frac{1}{\overline{z}})^{k-2} f(S\tau)\, d\,(S\tau) \\
&= \int\limits_z^{i\infty} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\, d\tau - \overline{z}^{k-2} \int\limits_z^{0} (-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\overline{z}})^{k-2} \tau^k f(\tau)\, \tau^{-2} d\tau \\
&= \int\limits_z^{i\infty} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^{z} (\tau - \overline{z})^{k-2} f(\tau)\, d\tau \\
&= r(f)(\overline{z})
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\frac{1}{2(2i)^{k-1}} \left(\int\limits_B \left(F(z) - \overline{z}^{k-2} F(-\frac{1}{z}) \right) \overline{g(z)} d\overline{z} \right) = \frac{1}{2(2i)^{k-1}} \int\limits_B r(f)(\overline{z}) \overline{g(z)}\, d\overline{z},$$

womit folgt

$$2 \cdot (2i)^{k-1} \langle f, g \rangle = \int\limits_B r(f)(\overline{z}) \overline{g(z)}\, d\overline{z}.$$

Sei nun

$$\begin{aligned} H(X) &:= \sum_{n=0}^{k-2}(-1)^n\binom{k-2}{n}\left(\int\limits_B g(z)z^n\,dz\right)X^{k-2-n} \\ &= \int\limits_B g(z)(z-X)^{k-2}\,dz. \end{aligned}$$

Da $g(z)(z-X)^{k-2}$ holomorph ist, hängt das Integral nicht von der Wahl des Integrationsweges ab. Seien nun $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und $\rho' := -\overline{\rho} = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Also ist

$$\int\limits_B g(z)(z-X)^{k-2}\,dz = \int\limits_{\rho}^{\rho'} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz.$$

Wir definieren allgemein

$$H_{z_0}(X) := \int\limits_{z_0}^{i\infty} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz \text{ mit } z_0 \in \mathbb{H}.$$

Dann gilt $H = H_\rho - H_{\rho'}$.

Wir haben

$$H_{z_0}|\gamma = \int\limits_{\gamma^{-1}(z_0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz \text{ für alle } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} H_{\rho'}|(1-U) &= \int\limits_{\rho'}^{i\infty} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz - \int\limits_{\rho'}^{0} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\ &= \int\limits_{0}^{i\infty} g(z)(z-X)^{k-2}\,dz \\ &= r(g)(X) \end{aligned}$$

und $H_{\rho'}|T = H_\rho$.

Wir haben nun

$$\begin{aligned} r(f)|(1-T^{-1}) &= r(f)|(1+ST^{-1}) = r(f)|(1+U^2) \\ &= \frac{1}{3} r(f)|(U^2-U)|(1-U^{-1}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left\langle r(f), \overline{H} \right\rangle &= \left\langle r(f), \overline{H_\rho}|(T-1) \right\rangle \\ &= \left\langle r(f)|(T^{-1}-1), \overline{H_\rho} \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle r(f)|(U-U^2), \overline{H_\rho}|(1-U) \right\rangle \\ &= \frac{1}{3} \left\langle r(f)|(TS-ST^{-1}), \overline{r(g)} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{3} \left\langle r(f)|(T-T^{-1}), \overline{r(g)} \right\rangle . \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\langle f, g \rangle = -\frac{1}{6(2i)^{k-1}} \left\langle r(f)|(T-T^{-1}), \overline{r(g)} \right\rangle .$$

□

Eine wichtige Konsequenz des Satzes von Haberland ist der folgende elementare Beweis des Satzes von Eichler-Shimura. (Vgl. z.B. [6])

Satz 3.14 (Eichler-Shimura):

(*i*) Die Abbildung

$$r^- : S_k \to W_k^-$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

(*ii*) Man hat $p_k^+ := (X^{k-2} - 1) \in W_k^+$ und die Abbildung

$$r^+ : S_k \to W_k^+ \big/ \mathbb{C}p_k^+$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

Beweis: Wir zeigen die Injektivität der Morphismen r^-, r^+. Sei $f \in S_k$ mit $f \in \ker(r^-)$ bzw. $f \in \ker(r^+)$. Da nach Annahme alle geraden oder ungeraden $r_n(f) = 0$ sind, folgt mit dem Satz von Haberland nun $\langle f, f \rangle = 0$,

Weil das Petersson-Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt $f = 0$. Also ist r^- injektiv und r^+ ist injektiv, weil $p_k^+ \notin r^+(S_k)$, das heisst

$$\dim S_k = \dim r^-(S_k) = \dim r^+(S_k).$$

Wegen der Dimensionsformel aus 3.12 gilt

$$\dim(S_k) = \dim(W_k^-) = \dim \left(W_k^+ / \mathbb{C}p_k^+ \right).$$

Aus der Injektivität von r^+ bzw. r^- folgt nun die Isomorphie. $\square$

Literatur

[1] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[2] Klaus Haberland. Perioden von Modulformen einer Variabler and Gruppencohomologie. I, II, III. *Math. Nachr.*, 112:245–282, 283–295, 297–315, 1983.

[3] Ulf Kühn. *Vorlesung Modulformen.* Uni Hamburg, Sommersemester 2008.

[4] Max Koecher and Aloys Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] W. Kohnen and D. Zagier. Modular forms with rational periods. In *Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., pages 197–249. Horwood, Chichester, 1984.

[6] Serge Lang. *Introduction to modular forms*, volume 222 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1995. With appendixes by D. Zagier and Walter Feit, Corrected reprint of the 1976 original.

[7] Ju. I. Manin. Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 92(134):378–401, 503, 1973.

[8] François Martin and Emmanuel Royer. Formes modulaires et périodes. In *Formes modulaires et transcendance*, volume 12 of *Sémin. Congr.*, pages 1–117. Soc. Math. France, Paris, 2005.

[9] D. Zagier. Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, pages 105–169. Lecture Notes in

Math., Vol. 627. Springer, Berlin, 1977.