

# Hecke Operatoren auf Periodenpolynomen

Bachelorarbeit

8. Januar 2010

HENRIK BACHMANN

1. Gutachter: Prof. Dr. ULF KÜHN
2. Gutachter: PD. Dr. ERNST KLEINERT

Department Mathematik der Universität Hamburg



## **Erklärung**

Die vorliegende Arbeit habe ich selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel - insbesondere keine im Quellenverzeichnis nicht benannten Internet-Quellen - benutzt.

Die Arbeit habe ich vorher nicht in einem anderen Prüfungsverfahren eingereicht. Die eingereichte schriftliche Fassung entspricht genau der auf dem elektronischen Speichermedium.

Henrik Bachmann

Hamburg, 8. Januar 2010

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>Einleitung</b>	1
1. <b>Modulformen</b>	2
2. <b>Hecke Operatoren</b>	10
3. <b>Periodenpolynome</b>	16
4. <b>Maninmatrizen &amp; Matrizen Relationen</b>	19
5. <b>Hecke Operatoren auf Periodenpolynomen</b>	25
6. <b>Beweis von Theorem I</b>	30
Literatur	37

## Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Modulformen, Periodenpolynomen und insbesondere mit der Beziehung zwischen Hecke Operatoren auf dem Raum der Modulformen und einem analogen Begriff für Periodenpolynome.

Modulformen sind dabei holomorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene, die bestimmte Symmetrieeigenschaften erfüllen und bei einem fest gewählten Gewicht endlich dimensionale Vektorräume bilden. Sie finden zahlreiche Anwendung in verschiedensten Bereichen der Mathematik wie zum Beispiel in der Zahlentheorie und da z.B. im Beweis des großen Fermatschen Satzes von ANDREW WILES<sup>1</sup> (Siehe [AW]). 1935 führte ERICH HECKE<sup>2</sup>, ein deutscher Mathematiker der auch ab 1919 an der Universität Hamburg lehrte, die sogenannten Hecke Operatoren ein, welche Vektorraumendomorphismen auf dem Raum der Modulformen sind. Interessant hierbei ist, das diese Operatoren stets simultane Eigenfunktionen besitzen, deren Fourierkoeffizienten bestimmte Eigenschaften erfüllen.

Ist eine Modulform vom Gewicht  $k$  gegeben, so kann man zu dieser das zugehörige Periodenpolynom bilden, welches ein Polynom in einem gewissen Unterraum aller Polynome vom Grad  $k - 2$  ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, in diesem Unterraum einen Endomorphismus vorzustellen, der dort eine analoge Rolle spielt zu den Hecke Operatoren im Raum der Modulformen. Genauer gesagt wird in Theorem I eine Abbildung  $\bar{T}_n$  präsentiert, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_k & \xrightarrow{r_f} & W_k \\ T_n \downarrow & & \downarrow \bar{T}_n \\ S_k & \xrightarrow{r_f} & W_k \end{array}$$

kommutieren lässt, wobei  $S_k$  ein Unterraum der Modulformen (die sogenannten Spitzenformen),  $W_k$  den Unterraum der Polynome und  $T_n$  den  $n$ -ten Hecke Operator bezeichnet. Im ersten Teil werden zunächst die Grundbegriffe wie Modulform, Spitzenform, Gitterfunktion, Hecke Operator und Periodenpolynom mit einigen Beispielen erläutert. Anschließend werden im zweiten Teil ihre Zusammenhänge und die oben beschriebene Abbildung vorgestellt.

Diese Arbeit richtet sich für den Beweis von Theorem I nach [DZ2]. Hauptziel dieser Arbeit ist es, eine Ausführung des dort sehr knapp gehaltenen Beweises anzugeben.

---

<sup>1</sup>Andrew John Wiles, \*11. April 1953 Cambridge.

<sup>2</sup>Erich Hecke, \*20. September 1887 Buk - †13. Februar 1947 Kopenhagen.

## 1. Modulformen

Dieser Abschnitt soll die grundlegenden Begriffe der Theorie von Modulformen zur vollen Modulgruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  vorstellen. Im Anschluß an die Definition der Modulformen werden die Hecke Operatoren auf Modulformen erklärt. Hierbei handelt es sich um Vektorraumendomorphismen, die für eine natürliche Zahl und eine Modulform eine neue Modulform des gleichen Gewichtes liefern. Dabei entpuppen sich die Eigenfunktionen dieser Operatoren als äußerst interessante Objekte, die viele zahlentheoretische Eigenschaften besitzen.

Um auf die spätere Verknüpfung von Hecke Operatoren auf Funktionen und Hecke Operatoren auf Polynomen eingehen zu können, werden am Ende des Abschnitts noch die Periodenpolynome definiert.

### 1.1. Elliptische Modulgruppe

Die Menge

$$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}) \mid ad - cb = 1 \right\}$$

heißt elliptische Modulgruppe. Sie wird von den beiden Matrizen  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  erzeugt (Siehe [KK], S. 125).

Im Folgenden ist stets  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  und  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ .

Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \times \Gamma &\rightarrow \mathbb{H} \\ (z, \gamma) &\mapsto \gamma.z := \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

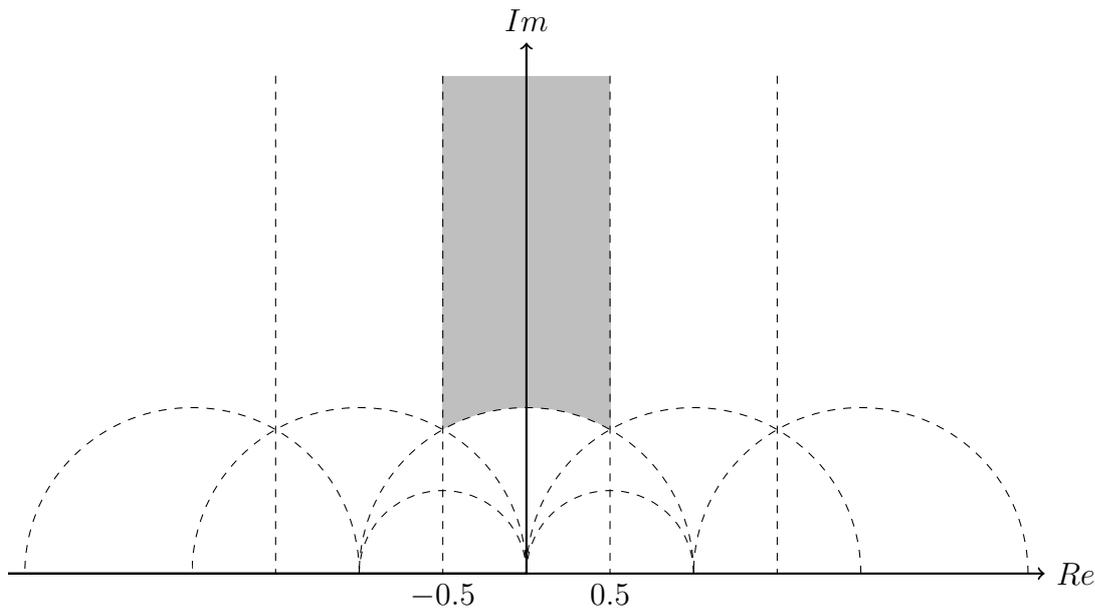
wird eine Operation von  $\Gamma$  auf der oberen Halbebene definiert.

### 1.2. Fundamentalbereich $\mathcal{F}$

Die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0 \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, \quad 0 < \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

heißt Fundamentalbereich.



$\mathcal{F}$  enthält ein vollständiges Repräsentantensystem von  $\mathbb{H}/\Gamma$ , d.h für jedes  $z \in \mathbb{H}$  gibt es ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma.z \in \mathcal{F}$ . Der Beweis hierzu findet sich z.B. in [KK], S. 127.

### 1.3. Slashoperator

Für ein  $k \in \mathbb{N}$  heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \times M(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ \left( f, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &\longmapsto f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (cz + d)^{-k} f \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) \end{aligned}$$

$k$ -ter Slashoperator.

### 1.4. Schwach modulare Funktion

Eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$  heißt eine schwach modulare Funktion, wenn für ein  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$f(z) = f(z)|_k \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

hierbei bezeichnet  $k$  das Gewicht von  $f$ . Aufgrund der Tatsache, dass  $\mathcal{F}$  ein vollständiges Repräsentantensystem von  $\mathbb{H}/\Gamma$  enthält, ist eine schwach modulare Funktion aufgrund ihres Transformationsverhalten schon durch ihre Werte auf  $\mathcal{F}$  festgelegt.

### 1.5. Fourier-Entwicklung

Da insbesondere  $-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E \in \Gamma$  und  $f|_k -E = (-1)^{-k} f \left( \frac{-z+0}{0-z+1} \right) = (-1)^{-k} f(z) = f(z)$  kann das Gewicht  $k$  einer schwach modularen Funktion nur gerade sein. Im Folgendem

wird  $k$  daher meist stillschweigend als gerade angenommen.

Die Matrix  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  beschreibt eine Translation um 1 und es gilt  $f(T.z) = f(z+1) = f(z)$  für eine schwach modulare Funktion. Betrachtet man nun die 1-periodische Funktion  $q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $q : z \rightarrow e^{2\pi iz}$  die einen Streifen der Breite 1 auf der oberen Halbebene bijektiv auf den Einheitskreis ohne die Null abbildet, dann gibt es für eine schwach modulare Funktion  $f$  eine meromorphe Funktion  $g \in \mathcal{M}(\mathbb{E})$  mit  $f(z) = g(q(z))$ . Betrachtet man nun die Laurent Entwicklung von  $g$  um 0, dann lässt sich  $f$  schreiben als

$$f(z) = g(q(z)) = \sum_{n \geq m} a_n q(z)^n = \sum_{n \geq m} a_n q^n.$$

mit  $a_n \in \mathbb{C}$  und einem  $m \in \mathbb{Z}$ . Dies ist die Fourier-Entwicklung von  $f$  (Siehe [FB], S. 149). Man interessiert sich nun für die meromorphen Funktionen  $g$ , die sich holomorph in den Nullpunkt fortsetzen lassen. Dies ist gleichbedeutend mit  $m \geq 0$  in der Fourier-Entwicklung von  $f$ . Der Wert in 0 ist dann  $a_0$ . Anschaulich ist dies der "Wert in Unendlich" von  $f$ . Hierzu folgende Definition:

### 1.6. Modulform / Spitzenform / Modulfunktion

i) Eine holomorphe schwach modulare Funktion  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$  heißt Modulform, wenn ihre Fourier-Entwicklung folgende Form hat:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n.$$

ii) Eine Modulform mit  $a_0 = 0$  heißt Spitzenform und die Menge aller Spitzenformen wird mit  $S_k$  bezeichnet.

iii) Eine schwach modulare Funktion vom Gewicht 0 heißt Modulfunktion.

#### Bemerkungen:

- Da  $M_k$  abgeschlossen bezüglich Addition und Skalarmultiplikation ist, bilden die  $M_k \forall k \in \mathbb{N}$  einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Wie gleich erwähnt wird, ist dieser für jedes  $k$  endlich dimensional und es lässt sich leicht die Dimension explizit angeben.
- Betrachtet man  $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$  dann erhält man einen graduierten Ring bei dem gilt  $f \cdot g \in M_{m+n}$  wenn  $f \in M_m$  und  $g \in M_n$ .
- In einigen Literaturquellen wird schon eine schwach modulare Funktion Modulform genannt und die hier definierten Modulformen werden als ganze Modulformen bezeichnet.

Es stellt sich zunächst die Frage ob solche Funktionen neben der Nullfunktion, die trivialerweise für jedes  $k$  eine Modulform ist, überhaupt existieren, welche Dimension die zugehörigen Vektorräume haben und wie die Fourier-Entwicklungen dieser Funktionen aussehen. Diese Fragen sollen nun beantwortet werden:

### 1.7. Eisensteinreihen

Sei  $k \in \mathbb{N}$  gerade und grösser 2. Dann ist die (normierte) Eisensteinreihe vom Gewicht  $k$  definiert als:

$$G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2 \cdot (2\pi i)^k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} (mz+n)^{-k}.$$

Diese ist eine Modulform zum Gewicht  $k$ . Für die Fourier-Entwicklung von  $G_k$  gilt

$$G_k(z) = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (k-1)!}{(2\pi)^k} \zeta(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Dabei ist  $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$  die Teilersummenfunktion.

Dies definiert analytische Funktionen auf der oberen Halbebene, für die gilt  $G_k(z) |_{\gamma} = G_k(z)$ ,  $\forall \gamma \in \Gamma$  (Siehe [KK], S. 22). Der Faktor  $\frac{(k-1)!}{2 \cdot (2\pi i)^k}$  sorgt dafür, dass der erste Fourierkoeffizient bei  $q$  für alle geraden  $k$  identisch 1 ist.

### 1.8. Bernoulli Zahlen / Polynome

Die  $n$ -te Bernoulli Zahl  $B_n$  ist definiert als Koeffizient folgender Taylorreihe:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Das  $k$ -te Bernoulli Polynom wird definiert durch

$$B_k(X) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} B_r X^{k-r}.$$

Zusätzlich definieren wir das modifizierte Bernoulli Polynom

$$B_{k-1}^0(X) := B_{k-1}(X) - (k-1)B_1 X^{k-2} = \sum_{r \neq 1} \binom{k-1}{r} B_r X^{k-1-r}.$$

**Beispiel:**

$$B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X, \quad B_3^0(X) = X^3 + \frac{1}{2}X.$$

Da  $B_r$  für ungerade  $r$  die nicht 1 sind verschwindet, ist  $B_{k-1}^0(X)$  eine ungerade Funktion wenn  $k$  gerade ist. D.h  $B_{k-1}^0(-X) = -B_{k-1}^0(X)$ . Dies wird für den späteren Beweis von Theorem I benötigt.

**1.9. Satz (L. Euler, 1737)**

Für die Werte der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion von geraden natürlichen Zahlen gilt:

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$$

**Beweis:** Siehe [FB], S. 187. □

Damit erhält man für die Darstellung der Eisensteinreihen die äquivalente Form:

$$G_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

**1.10. Diskriminante  $\Delta$** 

Die Diskriminante  $\Delta$  ist definiert durch

$$\Delta(z) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}.$$

Dies liefert eine Spitzenform ohne Nullstellen auf der oberen Halbebene (Siehe [DZ3], S. 10). Die Koeffizienten der Fourierreihe  $\sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$  definieren die  $\tau$ -Funktion von RAMANUJAN<sup>3</sup>. Nach diesen zahlreichen Definitionen von verschiedenen Zahlenreihen zusammenfassend eine kleine Übersicht:

$n$	$\tau(n)$	$B_n$	$\sigma_3(n)$	$\sigma_5(n)$	$\sigma_7(n)$	$\sigma_9(n)$	$\sigma_{11}(n)$
0	-	1	-	-	-	-	-
1	1	$-\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1
2	-24	$\frac{1}{6}$	9	33	129	513	2049
3	252	0	28	244	2188	19684	177148
4	-1472	$-\frac{1}{30}$	73	1057	16513	262657	4196353
5	4830	0	126	3126	78126	1953126	48828126
6	-6048	$\frac{1}{42}$	252	8052	282252	10097892	362976252
7	-16744	0	344	16808	823544	40353608	1977326744
8	84480	$-\frac{1}{30}$	585	33825	2113665	134480385	8594130945
9	-113643	0	757	59293	4785157	387440173	31381236757
10	-115920	$\frac{5}{66}$	1134	103158	10078254	1001953638	100048830174
11	534612	0	1332	161052	19487172	2357947692	285311670612
12	-370944	$-\frac{691}{2730}$	2044	257908	36130444	5170140388	743375541244

<sup>3</sup>Srinivasa Ramanujan, \*22. Dezember 1887 Erode - †26. April 1920 Kumbakonam.

Man kann hier den Anfang der Fourierreihe von  $G_4$  bis  $G_{12}$  und von  $\Delta$  ablesen. Für  $G_4$  betrachtet man dazu die vierte Spalte und erhält:

$$\begin{aligned} G_4(z) &= -\frac{B_4}{2 \cdot 4} + \sigma_3(1)q + \sigma_3(2)q^2 + \sigma_3(3)q^3 + \sigma_3(4)q^4 + \sigma_3(5)q^5 + \sigma_3(6)q^6 + \dots \\ &= \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + \dots \end{aligned}$$

und für die Diskriminante die zweite Spalte:

$$\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + 84480q^8 - 113643q^9 + \dots$$

Betrachtet man für diese beiden Beispiele die Fourierkoeffizienten, dann bemerkt man, dass sowohl  $\sigma_{k-1}(n)$  als auch  $\tau(n)$  multiplikativ sind. Dass letztere Aussage gilt, ist keinesfalls trivial und wurde von RAMANUJAN selbst auch nur vermutet. Bewiesen wurde dies 1920 von L.J. MORDELL. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass bestimmte Modulformen (unter anderem  $G_k$  und  $\Delta$ ), die sogenannten Hecke Eigenformen, stets multiplikative Fourierkoeffizienten besitzen.

Zunächst aber noch ein Beispiel für eine Modulfunktion:

### 1.11. $j$ -Funktion

Durch

$$\begin{aligned} j(z) &:= \frac{(240G_4)^3}{\Delta(z)} = \frac{(1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 \dots)^3}{q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5} \\ &= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots \end{aligned}$$

wird eine Funktion auf der oberen Halbebene definiert, die  $j$ -Funktion, Absolute Invariante oder auch Kleins<sup>4</sup> Invariante genannt wird.

Da  $G_4$  und  $\Delta$  analytische Funktionen sind und  $\Delta$  in  $\mathbb{H}$  keine Nullstellen besitzt, ist  $j$  auch eine analytische Funktion auf  $\mathbb{H}$ . Da  $G_4\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^4 G_4(z)$  und  $\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}$  für  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$  folgt:

$$j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = j(z).$$

Somit ist  $j$  eine schwach modulare Funktion vom Gewicht 0 und somit eine Modulfunktion. Sie ist aber keine Modulform aufgrund ihres Pols in  $\infty$ .

### Bemerkungen:

- Zusätzlich kann man noch zeigen, dass sich jede andere Modulfunktion als rationale Funktion in  $j$  ausdrücken lässt und auch jeder rationale Ausdruck in  $j$  eine Modulfunktion ist. Die Menge aller Modulfunktionen wird also durch  $\mathbb{C}(j)$  gegeben.

<sup>4</sup>Felix Klein, \*25. April 1849 Düsseldorf - †22. Juni 1925 Göttingen.

- Die  $j$ -Funktion ist eine bijektive Abbildung  $\mathbb{H}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ . Siehe z.B. [FB], S. 317ff.
- Die Fourierkoeffizienten von  $j$  sind Linearkombinationen der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der sogenannten Monstergruppe, welches die grösste sporadische mit Gruppe ca.  $8 \cdot 10^{53}$  Elementen ist. Dieser Zusammenhang war ein Resultat aus der "moonshine theory", welche 1998 von R. E. BORCHERDS bewiesen wurde und dessen Beweis Borchers die Fields Medaille einbrachte.

### 1.12. Satz ( $\frac{k}{12}$ -Formel)

Für alle von Null verschiedenen schwachen Modularen Funktionen vom Gewicht  $k$  ohne wesentliche Singularität in  $i\infty$  gilt:

$$\sum_a \frac{1}{e(a)} \text{ord}(f; a) + \text{ord}(f, i\infty) = \frac{k}{12}.$$

wobei  $a$  ein Repräsentantensystem modulo  $\Gamma$  aller Pole und Nullstellen von  $f$  durchläuft und

$$e(a) = \frac{1}{2} \# \Gamma_a = \begin{cases} 3, & \text{falls } a \equiv \rho \pmod{\Gamma} \\ 2, & \text{falls } a \equiv i \pmod{\Gamma} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Beweis:** Siehe [FB], S. 336. □

### 1.13. Satz (Dimensionsformel für $M_k$ )

Für die Dimension des  $\mathbb{C}$ -Vektorraumes  $M_k$  gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_k) = \begin{cases} \left[ \frac{k}{12} \right], & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \left[ \frac{k}{12} \right] + 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Beweis:** Dies ist eine Folgerung aus der  $\frac{k}{12}$ -Formel. Siehe [FB], S. 345 □

### 1.14. Korollar (Hurwitz Identität)

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{r+s=m} \sigma_3(r) \sigma_3(s).$$

**Beweis:** Eine Folgerung aus dem Koeffizientenvergleich der Fourierreihen von  $7G_8 = 3G_4^2$  (Siehe [KK], S. 51). □

## 2. Hecke Operatoren

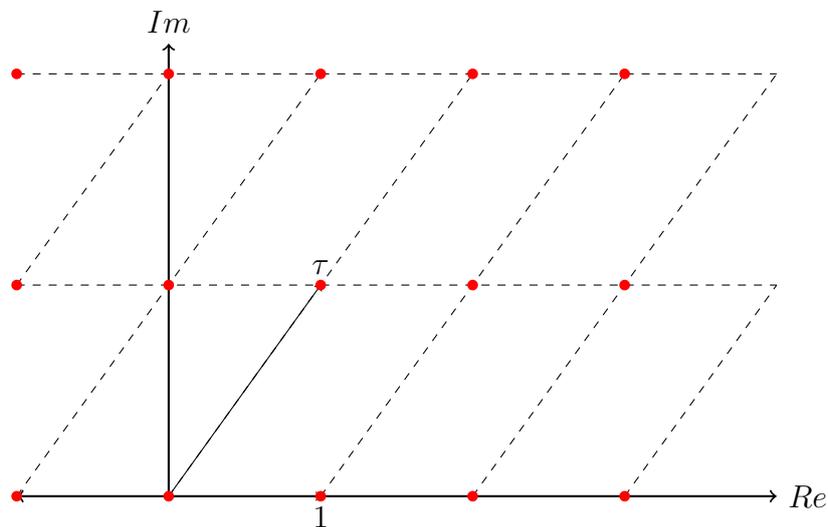
Hecke Operatoren sind Vektorraumendomorphismen  $M_k \rightarrow M_k$ , die 1935 von E. HECKE eingeführt wurden und einen interessanten Teil in der Theorie der Modulformen einnehmen. Sie werden zunächst auf Gitterfunktionen definiert und dann nach der Identifizierung von Gitterfunktionen mit Modulformen auf den Raum der Modulformen übertragen.

### 2.1. Gitter

Für zwei  $\mathbb{R}$ -linear unabhängige  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  ist ein Gitter  $L \subset \mathbb{C}$  eine diskrete Untergruppe von  $(\mathbb{C}, +)$  der Form

$$L(\omega_1, \omega_2) = \{m\omega_1 + n\omega_2 \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Zwei Gitter  $L_1, L_2$  heißen äquivalent, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  gibt mit  $L_1 = \lambda \cdot L_2$ . Es ist offensichtlich, dass sich stets ein  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  finden lässt, so dass ein Gitter äquivalent zu einem Gitter der Form  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  mit  $\tau \in \mathbb{H}$  ist.



Die Menge aller Gitter wird im Folgendem mit  $\Lambda$  bezeichnet.

### 2.2. Korrespondenz

Sei  $E$  eine Menge. Dann ist  $X_E$  die freie abelsche Gruppe, die von  $E$  erzeugt ist.

$$X_E = \left\{ \sum_{e_i \in E} \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, \text{ fast alle } \lambda_i = 0 \right\}$$

Eine Korrespondenz auf  $E$  ist dann ein Homomorphismus  $End(X_E) \ni \Psi : X_E \rightarrow X_E$ .

### 2.3. Hecke Korrespondenzen

Auf der Menge  $\Lambda$  werden für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  die Hecke Korrespondenzen  $T_n$ ,  $R_\lambda \in \text{End}(X_\Lambda)$  definiert durch

$$\begin{aligned} T_n : X_\Lambda &\longrightarrow X_\Lambda \\ L &\longmapsto \sum_{[L:L']=n} L' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_\lambda : X_\Lambda &\longrightarrow X_\Lambda \\ L &\longmapsto \lambda L = \{z \in \mathbb{C} \mid \lambda^{-1}z \in L\}. \end{aligned}$$

$T_n$  ordnet einem Gitter somit eine formale Summe seiner Untergitter mit Index  $n$  zu.  $R_\lambda$  ordnet nach Definition einem Gitter ein äquivalentes Gitter zu.

Die durch  $T_n$  und  $R_\lambda$  erzeugte  $\mathbb{C}$ -Algebra  $\mathcal{H} \subset \text{End}(X_\Lambda)$  wird Hecke Algebra genannt. Sie ist kommutativ und es gelten folgende Relationen:

### 2.4. Satz (Eigenschaften von $T_n$ )

Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ ,  $1 < n, m \in \mathbb{N}$  mit  $ggT(m, n) = 1$  und  $p$  prim gilt:

- i)  $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ .
- ii)  $R_\lambda T_n = T_n R_\lambda$ .
- iii)  $T_n T_m = T_m T_n$ .
- iv)  $T_{p^n} T_p = T_{p^{n+1}} + p T_{p^{n-1}} R_p$ .

**Beweis:** Siehe [SE], S. 98 Prop. 10

□

### 2.5. Homogene Gitterfunktion

Für ein  $k \in \mathbb{N}$  nennt man eine Funktion  $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  eine homogene Gitterfunktion, wenn für alle  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  gilt:

$$R_\lambda F(L) := F(R_\lambda(L)) = \lambda^{-k} F(L).$$

Die Menge dieser Funktionen sei im Folgendem  $\Lambda_k$ .

#### Beispiele:

Ein Beispiel für eine homogene Gitterfunktion ist

$$\xi_k(L) = \sum_{\lambda \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}.$$

Die Identifikation  $\tau \rightarrow \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  induziert einen Isomorphismus  $\phi : M_k \rightarrow \Lambda_k$ , der gegeben ist durch:

$$\phi : f \longmapsto F(\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}) = \omega_1^k F\left(\mathbb{Z} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\right) := \omega_1^k f\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

$$\phi^{-1} : F \mapsto f(z) := F(\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}).$$

Dabei wird  $F$  die zu  $f$  entsprechende Gitterfunktion genannt. Für das Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\xi_k)(z) &= \xi_k(\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}) \\ &= \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}) \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^k} \\ &= \frac{2 \cdot (2\pi i)^k}{(k-1)!} G_k. \end{aligned}$$

Somit ist  $\xi_k$  die zugehörige Gitterfunktion zu einem Vielfachen der Eisensteinreihe  $G_k$ .

## 2.6. Hecke Operator

Sei  $f \in M_k$ . Dann ist für ein  $n \in \mathbb{N}$  der Hecke Operator  $T_n : M_k \rightarrow M_k$  definiert durch

$$T_n f := n^{k-1} T_n F,$$

wobei  $F$  die zu  $f$  entsprechende Gitterfunktion ist. Definiert man  $M_n$  durch

$$M_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z}) \mid a \geq 1, ad = n, 0 \leq b \leq d \right\}$$

dann gilt:

$$T_n f(z) = n^{k-1} \sum_{A \in M_n} f|_A.$$

## 2.7. Satz (Eigenschaften von $T_n$ auf $M_k$ )

Sei  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$  und  $1 < n, m \in \mathbb{N}$  mit  $ggT(m, n) = 1$  und  $p$  prim. Dann gilt analog zum vorigen Satz für die Hecke Operatoren auf  $M_k$ :

- i)  $T_m T_n f = T_{m \cdot n} f.$
- ii)  $T_{p^n} T_p f = T_{p^{n+1}} f + p^{k-1} T_{p^{n-1}} f.$

**Beweis:** Siehe [SE], S. 101 Prop. 11

□

**2.8. Satz (Fourierkoeffizienten von  $T_n f$ )**

Für  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$  und  $n \in \mathbb{N}$  gelten für die Fourierkoeffizienten von  $T_n f = \sum_{m \geq 0} \gamma_m q^m$ :

$$\begin{aligned} \text{i) } \gamma_m &= \sum_{d|ggT(m,n)} d^{k-1} a_{\frac{m \cdot n}{d^2}}, \\ \text{ii) } \gamma_0 &= \sigma_{k-1}(n) \cdot a_0, \\ \text{iii) } \gamma_1 &= a_n. \end{aligned}$$

**Beweis:** Siehe [SE], S. 101 Prop. 12 □

**2.9. Eigenform**

Eine Modulform  $0 \neq f \in M_k$  die zu  $T_n$  Eigenfunktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, heißt Eigenform. Gilt zusätzlich  $a_1(f) = 1$ , so heißt  $f$  eine normierte Eigenform.

**2.10. Satz (Multiplikativität)**

Ist  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$  eine normierte Eigenform, dann gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $ggT(m, n) = 1$ :

$$a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n.$$

**Beweis:** Siehe [SE], S. 102 Cor. 12 □

**2.11. Petersson Skalarprodukt**

Sind  $f, g \in S_k$  so wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}.$$

ein hermitesches Skalarprodukt auf  $S_k$  definiert.

**2.12. Satz (Selbstadjungiertheit der  $T_n$ )**

Die Hecke Operatoren sind selbstadjungiert bezüglich des Petersson Skalarproduktes, d.h.  $\forall f, g \in S_k$  und  $\forall T_n \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle .$$

**Beweis:** Siehe [KK], S. 233 □

Wir erinnern an dieser Stelle an zwei Resultate aus der linearen Algebra:

**2.13. Satz (Existenz von simultanen Eigenvektoren)**

Ist  $V \neq 0$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\mathcal{A}$  eine kommutative  $\mathbb{C}$ -Unteralgebra von  $\text{End}(V)$  dann gibt es einen simultanen Eigenvektor  $0 \neq v \in V$  für alle  $T \in \mathcal{A}$ .

**Beweis:** Siehe [FI]. □

Da hier  $\mathcal{A} = \mathcal{H} \subset \text{End}(M_k)$  und die  $M_k$  endlich dimensional sind, gibt es für jedes gerade  $k$  Eigenvektoren in  $M_k$ .

**2.14. Satz (Satz über selbst. adj. Endomorphismen)**

Ist  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein hermitescher Vektorraum und  $T \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dann besitzt  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $T$ .

**Beweis:** Siehe [FI], S. 312 □

Da die Hecke Operatoren selbstadjungiert bezüglich des Petersson Skalarproduktes sind, gibt es für jedes  $M_k$  eine Basis aus Eigenformen.

**2.15. Satz (Multiplikativität der  $\tau$ -Funktion)**

Es gilt für  $ggT(n, m) = 1$ :

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(m \cdot n).$$

**Beweis:** Da  $S_{12}$  eindimensional ist und es eine Basis aus Eigenformen gibt, muss  $\Delta$  eine Eigenform sein. Da die Fourierkoeffizienten von Eigenformen multiplikativ sind, ist  $\tau$  multiplikativ. □

**2.16. Satz (L-Reihe)**

Ist  $f \in M_k$  eine Modulform, dann ist die Dirichletreihe

$$L(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

oder auch L-Reihe von  $f$  genannt, für  $\text{Re}(s) > k$  konvergent.  $L(f, s)$  besitzt zudem eine meromorphe Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene und die zugeordnete Funktion

$$L^*(f, s) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(f, s).$$

erfüllt die Funktionalgleichung

$$L^*(f, s) = (-1)^k L^*(f, k - s).$$

**Beweis:** Dieser Beweis geht auf E. Hecke zurück und findet sich z.B bei [SE], S. 103.  $\square$

### 2.17. Eulerprodukt

Die  $L$  – Reihe  $L(f, s)$  zu einer Hecke Eigenform besitzt ein Eulerprodukt

$$L(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

**Beweis:** Siehe [SE], S. 103 Cor. 3

$\square$

### 3. Periodenpolynome

#### 3.1. Satz ( $n$ -te Periode, Periodenpolynom)

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Periode einer Spitzenform  $f \in S_k$  definiert durch

$$r_n(f) := \int_0^{i\infty} f(z)z^n dz = i^{n+1}L^*(f, n+1).$$

Algebraische Vielfache der Perioden bilden die Koeffizienten des Periodenpolynoms

$$r_f(X) := \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n} r_n(f) X^{k-2-n} = \sum_{n=0}^{k-2} i^{1-n} (-1)^n \binom{k-2}{n} L^*(f, n+1) X^{k-2-n}.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad  $\leq k-2$ .

Wir bezeichnen die Menge dieser Polynome mit  $V_k := \{p \in \mathbb{C}[X] \mid \text{grad}(p) \leq k-2\}$ .

Das Bilden des Periodenpolynoms ist somit eine Abbildung  $r : S_k \rightarrow V_k$ . Wir können die Polynome in  $V_k$  nach geraden und ungeraden Potenzen sortieren und erhalten somit die Aufspaltung  $V_k = V_k^- \oplus V_k^+$  und die Abbildungen  $r^- : S_k \rightarrow V_k^-$  und  $r^+ : S_k \rightarrow V_k^+$ .

#### Beispiele:

Für das Periodenpolynom der Spitzenform  $\Delta \in S_{12}$  gilt

$$\begin{aligned} r_{\Delta}^+(X) &= c_+ \cdot -\frac{36}{691} (X^{10} - 1) + X^2(X^2 - 1)^3. \\ r_{\Delta}^-(X) &= c_- \cdot X(X^2 - 1)^2(4X^2 - 1)(X^2 - 4). \end{aligned}$$

mit  $c_+, c_- \in \mathbb{C}$  die für unsere Zwecke erstmal irrelevant sind. Auf die Form von  $r_{\Delta}^-$  gelangt man, indem man zeigt, dass  $r_{\Delta}^-(S_k)$  (Im Folgendem als  $W_{12}^-$  bezeichnet) aufgespannt wird von dem Polynom  $X(X^2 - 1)^2(4X^2 - 1)(X^2 - 4)$ . Genaueres hierzu findet sich bei [DZ3] in Kapitel 5.

Wie man bei der Definition des Periodenpolynom sieht, ist dieses nur für Spitzenformen definiert. Man kann das Periodenpolynom aber auch für nicht Spitzenformen definieren, indem man ein wenig anders vorgeht. Das Problem bei obiger Definition für nicht Spitzenformen ist die Existenz des Integrals, da nicht Spitzenformen für  $z \rightarrow i \cdot \infty$  nicht verschwinden also  $a_f(0) \neq 0$  in der Fourier-Entwicklung. Man betrachtet daher

$$L^*(f, s) = \int_0^{\infty} (f(iz) - a_f(0))z^{s-1} dz.$$

und erhält damit eine allgemeine Definition für  $r_f$ :

$$r_f(X) = \frac{a_f(0)}{k-1} (X^{k-1} + X^{-1}) + \sum_{n=0}^{k-2} i^{1-n} (-1)^n \binom{k-2}{n} L^*(f, n+1) X^{k-2-n}.$$

Die mit der obigen übereinstimmt, wenn  $f \in S_k$ . Diese Polynome liegen nicht mehr in  $V_k$  sondern in  $\tilde{V}_k := \bigoplus_{-1 \leq n \leq k-1} \mathbb{C}X^n \supset V_k$ . Durch diese Erweiterung des Begriffes des Periodenpolynoms lassen sich auch die Polynome für die Eisensteinreihen  $G_k$  angeben:

### 3.2. Satz (Periodenpolynome für $G_k$ )

Für  $k > 2$  und den beiden Polynomen

$$p_k^+(X) = X^{k-2} - 1,$$

$$p_k^-(X) = \sum_{\substack{-1 \leq n \leq k-1 \\ n \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{B_{k-n-1}}{(k-n-1)!} X^n$$

ist das Periodenpolynom von  $G_k$  gegeben durch

$$r_{G_k}(X) = -\frac{(k-2)!}{2} p_k^-(X) + \frac{\zeta(k-1)}{(2\pi i)^{k-1}} p_k^+(X).$$

**Beweis:** Die genaue Beschreibung der Definition von Periodenpolynomen für nicht Spitzenformen und dieser Beweis findet sich bei [DZ1], S. 452f.  $\square$

### 3.3. Slashoperator auf Polynomen

Für ein  $h \in \mathbb{N}$  wird analog wie bei den Modulformen für Perioden der Slashoperator definiert durch

$$\tilde{V}_k \times M(2 \times 2, \mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{V}_k$$

$$(p, \gamma) \rightarrow (p|_h \gamma)(X) := (cX + d)^{-h} p\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

### 3.4. Die Räume $\tilde{W}_k$ und $W_k$

Es seien  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann definieren wir

$$\tilde{W}_k := \ker(|_{2-k} (1 + S)) \cap \ker(|_{2-k} (1 + U + U^2)) \subset \tilde{V}_k.$$

$$W_k := \tilde{W}_k \cap V_k.$$

und  $W_k^+, W_k^-, \tilde{W}_k^+, \tilde{W}_k^-$ , analog wie oben.

Der Sinn dieser Definition liegt in dem folgendem Satz

### 3.5. Satz (Eichler-Shimura Isomorphismus)

- i) Die Abbildung  $r^- : S_k \rightarrow W_k^-$  ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen.  
 ii) Die Abbildung

$$r^+ : S_k \rightarrow W_k^+ / \mathbb{C}p_k^+.$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen.

- iii) Es gilt für alle  $k \geq 4$ :

$$\dim W_k = \dim M_k + \dim S_k.$$

**Beweis:** Siehe [MB] □

### Bemerkung:

Betrachtet man wieder  $\widetilde{W}_k$  und die Periodenpolynome von allen Modulformen aus  $M_k$  so erhält man mit  $r^\pm : M_k \rightarrow \widetilde{W}_k^\pm$  zwei Isomorphismen. Der Beweis hierzu findet sich in [DZ1], S. 453f.

### 3.6. Periodenpaarung

Auf  $V_k$  wird durch lineare Fortsetzung von

$$\langle X^n, X^m \rangle_{V_k} := \begin{cases} (-1)^n \binom{k-2}{n}^{-1}, & \text{falls } n + m = k - 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform definiert

### 3.7. Satz (Haberland)

Sei  $k \geq 4$  und  $f, g \in S_k$ . Dann gilt für das Petersson Skalarprodukt

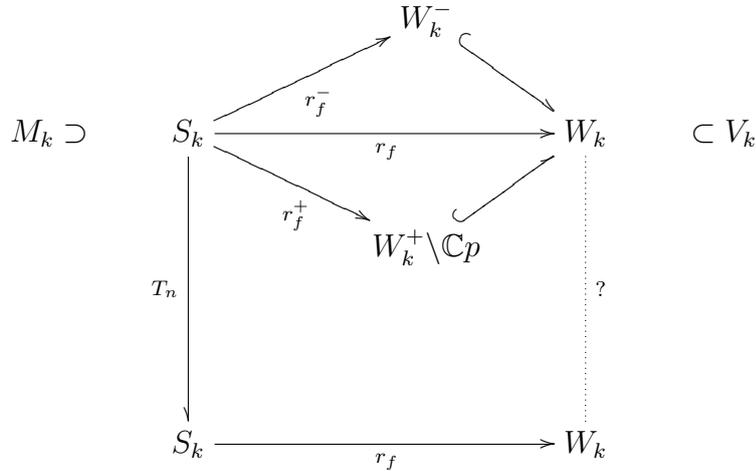
$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{6(2i)^{k-1}} \langle r_f|_{2-k}(T - T^{-1}), \overline{r_g} \rangle_{V_k} \\ &= \frac{1}{3(2i)^{k-1}} \sum_{\substack{0 < m < n < k-2 \\ m \not\equiv n \pmod{2}}} (-1)^m \binom{k-2}{n} \binom{n}{m} r_{n-m-2}(f) \overline{r_m g}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Siehe [MB], S. 25. □

**Bemerkung:** Satz 3.5 ist eine Folgerung aus diesem Satz.

#### 4. Maninmatrizen & Matrizen Relationen

Fasst man nun die Informationen aus §1 zusammen, erhält man das Diagramm



Auf beiden Seiten  $S_k$  und  $W_k$  wurden zudem Bilinearformen definiert. Ihr Zusammenhang wird durch den Satz von Haberland beschrieben. Was nun noch offen bleibt, ist die Frage nach einem analogen Begriff des Hecke Operators auf  $W_k$  (Im Diagramm durch ? gekennzeichnet).

Dieses Kapitel soll genau diese Frage beantworten und eine Abbildung  $W_k \rightarrow W_k$  präsentieren, die obiges Diagramm kommutieren lässt.

Im Folgendem wird mit  $\mathcal{M}$  der Ring der formalen linear Kombinationen  $\sum \lambda_i M_i$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  und  $M_i \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$  bezeichnet. Durch lineare Fortsetzung des Slash-Operators  $|_k$  erhält man eine Operation  $|_k : V_k \times \mathcal{M} \rightarrow V_k$ .

##### 4.1. Maninmatrix

Eine Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z})$  ist eine Maninmatrix, wenn für ein  $n \in \mathbb{N}$  folgendes gilt:

- i)  $ad - bc = n$ ,
- ii)  $bc \leq 0$ ,
- iii)  $a > |c|, d > |b|$ ,
- iv)  $b = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} < c \leq \frac{a}{2}$ ,
- v)  $c = 0 \Rightarrow -\frac{d}{2} < b \leq \frac{d}{2}$ .

Für ein  $n$  ist die Menge  $\text{Man}_n$  die Menge der Matrizen aus  $M(2, \mathbb{Z})$ , die i) - v) erfüllen.

**Beispiele:**

$\text{Man}_n, n = 1, \dots, 7$

$$\text{Man}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Man}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Man}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Man}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Man}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Man}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Man}_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir definieren hierzu zusätzlich  $\tilde{T}_n := \sum_{M \in \text{Man}_n} M \in \mathcal{M}$ . Für diese formale Summe von Matrizen werden wir im Folgendem zwei Relationen zu anderen Elementen aus  $\mathcal{M}$

angeben, die für den späteren Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit benötigt werden. Ihre Gültigkeiten können durch direktes mühsames Nachrechnen überprüft werden. Wir geben daher nur Beispiele für  $n = 2$  an und verweisen auf entsprechende Literatur.

#### 4.2. Satz

Für  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T_n^\infty = \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ , und  $U_n = U_n^1 + U_n^2$  wobei

$$U_n^1 := \sum_{\substack{ad-bc=n \\ a > -c > 0, b > 0, d > 0 \\ \text{oder } a = -c > 0, b > d > 0 \\ \text{oder } a > -2c > 0, d > b = 0 \\ \text{oder } a > c = 0, d > -2b > 0}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (S-1), \quad U_n^2 := \sum_{\substack{x, y > 0 \\ 2xy = n}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right)$$

gilt

#### Matrizen Relation I

$$(4.2.1) \quad (S-1)\tilde{T}_n = T_n^\infty(S-1) + (1-T)U_n.$$

**Beweis:** Siehe [DZ4], S. 100. □

Wir rechnen diese Identität im Fall  $n = 2$  nach. Für die linke Seite von 4.2.1 erhält man:

$$\begin{aligned} (S-1)\tilde{T}_2 &= (S-1) \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergeben sich zunächst

$$T_2^\infty = \sum_{\substack{ad=2 \\ 0 \leq b < d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U_2^2 = \sum_{\substack{x, y > 0 \\ 2xy = n}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

( $U_2^2$  enthält keine Matrizen) und damit ist die rechte Seite dann die Summe folgender Matrizen

$$\begin{aligned}
(1-T)U_2 &= (1-T) \left( \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \\
T_2^\infty(S-1) &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) (S-1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich die Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  auf der rechten Seite wegheben und die restlichen 8 Matrizen mit denen auf der linken Seite übereinstimmen.

### 4.3. Satz

Mit  $H_n := \sum_{0 < b < d}^{ad=n} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  und  $E^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  gilt in  $\mathcal{M}/E^-$ :

#### Matrizen Relation II

$$(4.3.1) \quad (1-S)(H_n(S-1) - (1+T)U_n) = \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wobei  $\mathcal{M}/E^-$  hier die Menge der formalen Summen von Matrizen darstellt, deren Elemente gleich sind, wenn ihre Summanden sich nur durch die Multiplikation von  $E^-$  unterscheiden. Mit anderen Worten heißt dies, dass in 4.3 beide Seiten bezüglich des Slash Operators gleich operieren. (Zu beachten ist hier auch, dass  $-E$  in  $\mathcal{M}$  nicht das gleiche wie  $E^-$  ist.)

**Beweis:** Diesen Beweis erhält man wieder durch direktes mühevolleres Nachrechnen. Wir

geben daher wieder nur ein Beispiel im Fall  $n = 2$  an. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
(1-S)H_n(S-1) &= (1-S) \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < b < d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} (S-1) \\
&= (1-S) \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < b < d}} \left( \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \\
(4.3.2) \quad &= \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < b < d}} \left( \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -d & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Wie im ersten Beispiel ist hier  $Y_2^1 = 0$ . Mit  $(*) = (1-S)(1+T)U_n^2$  hat man:

$$\begin{aligned}
(*) &= (1-S)(1+T) \sum_{\substack{x,y>0 \\ 2xy=n}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= (1-S) \sum_{\substack{x,y>0 \\ 2xy=n}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad + (1-S) \sum_{\substack{x,y>0 \\ 2xy=n}} \left( \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{\substack{x,y>0 \\ 2xy=n}} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \right) \\
(4.3.3) \quad &- \sum_{\substack{x,y>0 \\ 2xy=n}} \left( \begin{pmatrix} -x & -y \\ 0 & -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ x & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ -x & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ x & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ x & -y \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun wieder den Fall  $l = 2$  und erhalten für die rechte Seite nur die Matrizen mit  $ad = -bc = 1$ , also

$$\sum_{\substack{ad-bc=2 \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

für 4.3.3 erhält man  $x = y = 1$  und somit

$$\begin{aligned}
(*) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

und  $a = b = 1, d = 2$  für 4.3.2

$$\begin{aligned}
(1 - S)H_2(S - 1) &= \sum_{\substack{ad=2 \\ 0 < b < d}} \left( \begin{pmatrix} b & -a \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -d & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d \\ a & b \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite fallen aufgrund von  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  in  $\mathcal{M}/E^-$  alle Matrizen mit einer  $\pm 2$  als Eintrag weg. Die restlichen Matrizen entsprechen der rechten Seite, da  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .  $\square$

## 5. Hecke Operatoren auf Periodenpolynomen

Folgendes Theorem stellt den Hauptsatz dieser Arbeit dar. Es werden zunächst Folgerungen und Beispiele präsentiert, bevor der Beweis in Abschnitt 6 erbracht wird.

### Theorem I

Die Abbildung  $\bar{T}_n : W_k \rightarrow W_k$  mit

$$\bar{T}_n(P) = \sum_{A \in Man_n} P|_{2-k} A = P|_{2-k} \tilde{T}_n$$

lässt das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_k & \xrightarrow{r_f} & W_k \\ T_n \downarrow & & \downarrow \bar{T}_n \\ S_k & \xrightarrow{r_f} & W_k \end{array}$$

kommutieren, d.h es gilt  $r(T_n f) = \bar{T}_n(r(f))$ .

### Beispiel:

Wie wir bereits wissen, ist

$$r_{\Delta}^+(X) = c_1 \cdot \left( -\frac{36}{691} (X^{10} - 1) + X^2 (X^2 - 1)^3 \right) = c_1 \cdot \left( -\frac{36}{691} X^{10} + X^8 - 3X^6 + 3X^4 - X^2 + \frac{36}{691} \right).$$

und da  $\Delta$  eine Eigenform ist, gilt mit obigen Theorem  $\bar{T}_n(r_{\Delta}^+) = \tau(n) \cdot r_{\Delta}^+$ . Für den Fall  $n = 2$  Rechnen wir dies vor (Wir lassen dabei den Faktor  $c_1$  beiseite).

Mit  $\tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  berechnen wir zunächst jeden Summanden einzeln:

$$r_{\Delta}^+(X)|_{-10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{36}{691} X^{10} + 4X^8 - 48X^6 + 192X^4 - 256X^2 + \frac{36864}{691},$$

$$r_{\Delta}^+(X)|_{-10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{36864}{691} X^{10} + 256X^8 - 192X^6 + 48X^4 - 4X^2 + \frac{36}{691},$$

$$\begin{aligned}
r_{\Delta}^{+}(X)|_{-10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &= \frac{36}{691}X^{10} - \frac{360}{691}X^9 + \frac{1144}{691}X^8 + \frac{17792}{691}X^7 + \frac{36664}{691}X^6 \\
&\quad - \frac{53296}{691}X^5 - \frac{178928}{691}X^4 + \frac{17792}{691}X^3 + \frac{197388}{691}X^2 - \frac{360}{691}X - \frac{37800}{691}, \\
r_{\Delta}^{+}(X)|_{-10} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{37800}{691}X^{10} + \frac{360}{691}X^9 - \frac{197388}{691}X^8 - \frac{17792}{691}X^7 + \frac{178928}{691}X^6 \\
&\quad + \frac{53296}{691}X^5 - \frac{36664}{691}X^4 - \frac{17792}{691}X^3 - \frac{1144}{691}X^2 + \frac{360}{691}X + \frac{36}{691}.
\end{aligned}$$

In Summe ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_2(r_{\Delta}^{+}) &= \left( -\frac{36}{691}(X^{10} - 1) + X^2(X^2 - 1)^3 \right) |_{-10} \tilde{T}_2 \\
&= \left( -\frac{36}{691}(X^{10} - 1) + X^2(X^2 - 1)^3 \right) |_{-10} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{864}{691}X^{10} - 24X^8 + 72X^6 - 72X^4 + 24X^2 - \frac{864}{691} \\
&= -24 \cdot r_{\Delta}^{+} = \tau(2) \cdot r_{\Delta}^{+}.
\end{aligned}$$

### 5.1. Satz (Manin Koeffizientensatz)

Für eine Eigenform  $f \in M_k$  gilt

$$a_n(f)r_{k-2}(f) = \sum_{Man_n} \sum_{0 \leq n \leq \frac{1}{2}k-1} \binom{k-2}{n} r_n(f)(b^{k-2-n}d^n - b^n d^{k-2-n}).$$

**Beweis:** Nach Theorem I gilt  $r(T_n f) = \bar{T}_n(r(f))$ . Wir wollen auf beiden Seiten  $X = 0$  setzen und erhalten somit den Satz.

#### i) Linke Seite

Da  $f$  Eigenform ist, gilt  $T_n f = a_n f$ . Daraus folgt

$$r_{T_n f}(X) = r_{a_n f}(X) = a_n r_f(X) = a_n \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n} r_n(f) X^{k-2-n}.$$

Setzt man  $X = 0$  bleibt nur der Term mit  $k - n - n = 0$  übrig und somit

$$r_{T_n f}(0) = a_n r_{k-2}(f).$$

#### ii) Rechte Seite

Es ist

$$\bar{T}_n r_f(X) = r_f(X)|_{\tilde{T}_n} = \sum_{M \in Man_n} r_f(X)|_{2-k} M = \sum_{M \in Man_n} (cX + d)^{k-2} r_f \left( \frac{aX + b}{cX + d} \right).$$

Auch hier setzen wir  $X = 0$  und erhalten

$$\bar{T}_n r_f(0) = \sum_{M \in \text{Man}_n} d^{k-2} r_f \left( \frac{b}{d} \right) = \sum_{\text{Man}_n} \sum_{0 \leq n \leq \frac{1}{2}k-1} \binom{k-2}{n} r_n(f) (b^{k-2-n} d^n - b^n d^{k-2-n}).$$

□

In Anbetracht des Isomorphismus  $r^\pm : M_k \rightarrow \widetilde{W}_k^\pm$  aus Satz 3.5 kann man obigen Satz als Konstruktion der zugehörigen Umkehrabbildung verstehen. Da in  $M_k$  stets eine Basis aus Eigenformen existiert, kann man zu einem gegebenen Polynom  $p \in \widetilde{W}_k^\pm$  eine lineare Kombination aus  $r_{f_i}(X) \in \widetilde{W}_k^\pm$  finden, so dass die  $f_i$  eine Basis aus Eigenformen in  $M_k$  bilden und sich mit obigen Satz, sofern  $r_{k-2}(f_i) \neq 0$ , durch die Berechnung ihrer Fourierkoeffizienten bestimmen lassen.

Für den Fall  $f = \Delta$  erhält man als Formel für die Fourierkoeffizienten  $\tau(n)$ :

### 5.2. Korollar (Berechnungsformel für $\tau(n)$ )

Mit den Polynomen  $\tau_1(X, Y) = Y^{10} - X^{10}$ ,  $\tau_2(X, Y) = \frac{691}{36} Y^2 X^2 (Y^2 - X^2)^3$  gilt:

$$\tau(n) = \sum_{\text{Man}_n} (\tau_1(b, d) - \tau_2(b, d)) \quad \text{und} \quad \sigma_{11}(n) = \sum_{\text{Man}_n} \tau_1(b, d).$$

Also insbesondere  $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$ , wobei  $\sum_{\text{Man}_n}$  hier bedeuten soll, dass über alle

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Man}_n$  summiert wird.

**Beweis:** Dies folgt direkt aus dem Satz 5.1 indem man an den Periodenpolynomen von  $\Delta$  in Gleichung 3.1 und  $G_{12}$  in Gleichung 3.2 die Perioden abliest und in obige Formel einsetzt.

□

### 5.3. Satz (Eichler-Shimura-Manin)

Ist  $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k$  eine Eigenform, dann gibt es  $\omega_f^+ \in i\mathbb{R}$  und  $\omega_f^- \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\frac{r_f^\pm(X)}{\omega_f^\pm} \in \mathbb{Q}_f[X], \quad \frac{\omega_f^+ \omega_f^-}{i \langle f, f \rangle} \in \mathbb{Q}_f.$$

wobei  $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots)$  der Erweiterungskörper von  $\mathbb{Q}$  ist, der durch Adjunktion der Fourierkoeffizienten von  $f$  entsteht.

**Beweis:** Dies wird mit Hilfe von Satz 3.7 bewiesen. Siehe [DZ3], S. 45.

□

**Beispiel:**

Im Falle  $f = \Delta$  erhält man (Siehe [DZ3]):

$$\begin{aligned}\omega_{\Delta}^+ &= 0.114379\dots i. \\ \omega_{\Delta}^- &= 0.00926927. \\ \frac{\omega_f^+ \omega_f^-}{i(\Delta, \Delta)} &= 2^{10} \in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\Delta}.\end{aligned}$$

**5.4. Die Polynome  $c_{kn}^0(X, Y)$ ,  $c_{kn}^E(X, Y)$  und  $c_{kn}(X, Y)$** 

Wir definieren die Polynome

$$c_{kn}^0(X, Y) = \sum_{\substack{f \in S_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{a_f(n)}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)r_f(Y))^- \in \mathbb{Q}[X, Y].$$

wobei  $(r_f(X)r_f(Y))^-$  den ungeraden Anteil von  $r_f(X)r_f(Y)$  bezeichnet, also:

$$(r_f(X)r_f(Y))^- = \frac{1}{2}(r_f(X)r_f(Y) - r_f(-X)r_f(-Y)) = r_f^+(X)r_f^-(Y) + r_f^-(X)r_f^+(Y).$$

Aus 5.3 folgt, dass  $\frac{r_f^{\pm}(X)r_f^{\mp}(Y)}{i \langle f, f \rangle} \in \mathbb{Q}_f[X, Y]$  für eine Eigenform  $f$  und somit  $\frac{r_{f^\sigma}^{\pm}(X)r_{f^\sigma}^{\mp}(Y)}{i \langle f^\sigma, f^\sigma \rangle} = \sigma \left( \frac{r_f^{\pm}(X)r_f^{\mp}(Y)}{i \langle f, f \rangle} \right)$  für  $f^\sigma = \sum_{n \geq 0} \sigma(a_n)q^n$  und  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_f/\mathbb{Q})$ . Damit sind die Koeffizienten von  $c_{kn}^0(X, Y)$  in  $\mathbb{Q}$ .

Zusätzlich definiert man den sogenannten Eisenstein Anteil

$$c_{kn}^E(X, Y) = \frac{2k(k-2)!}{B_k} \sigma_{k-1}(n) \sum_{t=0}^k \frac{B_t}{t!} \frac{B_{k-t}}{(k-t)!} (X^{t-1}(Y^{k-2} - 1) + (X^{k-2} - 1)Y^{t-1}) \in \mathbb{Q}[X, Y].$$

Die Summe dieser beiden wird mit  $c_{kn}(X, Y) := c_{kn}^0(X, Y) + c_{kn}^E(X, Y)$  bezeichnet.

Betrachtet man hier wieder die Erweiterung der Periodenpolynome und die des Skalarproduktes auf ganz  $M_k$ , so können wir bei  $c_{kn}^0(X, Y)$  neben den Spitzenformen über alle Eigenformen, also über den Spitzenformen und Eisensteinreihen summieren. Nach der Definition des Periodenpolynoms für die  $G_k$  aus Satz 3.2 erkennt man, dass der Teil der der Summe so hinzugefügt wird genau  $c_{kn}^E(X, Y)$  entspricht. Wir erhalten also

$$c_{kn}(X, Y) = \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{a_f(n)}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)r_f(Y))^-.$$

Für den Beweis von Theorem I wird folgendes Theorem benutzt

**Theorem II**Für  $k, l \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{aligned}
c_{kn}(X, Y) = & \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cXY + dY + aX + b)^{k-2} \\
& - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \left( B_{k-1}^0(aX + dY) + X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( \frac{a}{X} - dY \right) \right) \\
& - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \left( Y^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -aX + \frac{d}{Y} \right) - (XY)^{k-2} B_{k-1}^0 \left( \frac{a}{X} + \frac{d}{Y} \right) \right).
\end{aligned}$$

**Beweis:** Siehe [DZ1], S. 460.

□

## 6. Beweis von Theorem I

Im Folgendem operiert der Slash Operator auf Polynomen in zwei Unbestimmten. Da stets mit dem Gewicht  $2 - k$  gelaht wird, soll durch  $|_Y$  bzw.  $|_X$  deutlich gemacht werden, dass der Slash Operator auf der Unbestimmten  $Y$  bzw.  $X$  mit dem Gewicht  $2 - k$  operiert. Es ist klar, dass stets für ein Polynom  $p \in \mathbb{C}[X, Y]$  und Matrizen  $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$  gilt  $p|_X A|_Y B = p|_Y B|_X A$  und somit beide Operatoren kommutieren.

Wir wollen nun mit Hilfe von Theorem II zeigen, dass sogar  $r(T_n f)^\pm = \bar{T}_n(r(f)^\pm)$  gilt und damit insbesondere Theorem I.

Wir wissen, dass die  $r_f^\pm(X)$  für Eigenformen  $f$  linear unabhängig sind. In Anbetracht der Formel

$$c_{kn}(X, Y) = \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{a_f(n)}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)r_f(Y))^- ,$$

wobei über eine Basis von normierten (d.h.  $a_f(1) = 1$ ) Eigenformen summiert wird (Existenz dieser Basis siehe 2.14), kann man Theorem I beweisen, indem man folgende Identität zeigt:

$$(6.0.1) \quad c_{kn}(X, Y) = c_{k1}(X, Y)|_X \tilde{T}_n .$$

Denn damit haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{1}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_{T_n f}(X)r_f(Y))^- &= \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{a_f(n)}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)r_f(Y))^- \\ &\stackrel{6.0.1}{=} \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{1}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)r_f(Y))^- |_X \tilde{T}_n \\ &= \sum_{\substack{f \in M_k \\ f \text{ Eigenform}}} \frac{1}{(2i)^{k-3} \langle f, f \rangle} (r_f(X)|_X \tilde{T}_n r_f(Y))^- . \end{aligned}$$

Hieraus würde aufgrund der linearen Unabhängigkeit der  $r_f^\pm(Y)$  folgen, dass  $r_{T_n f}^\pm(X) = r_f^\pm(X)|_X \tilde{T}_n$  für alle  $f$  aus einer Basis von Eigenformen. Durch lineare Fortsetzung erhält man somit dann Theorem I.

Wir werden die rechte Seite  $c_{k1}(X, Y)|_X \tilde{T}_n$  im Folgendem mit Hilfe von Theorem II in die linke Seite überführen. Im Fall  $l = 1$  erhält man für die rechte Seite von Theorem II, dass

a=d=1 und somit:

$$\begin{aligned}
c_{k1}(X, Y) &= -\frac{2}{k-1} \left( B_{k-1}^0(X+1) + X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( \frac{1}{X} - Y \right) \right) \\
&\quad - \frac{2}{k-1} \left( Y^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -X + \frac{1}{Y} \right) - (XY)^{k-1} B_{k-1}^0 \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \right) \right) \\
&= -\frac{2}{k-1} \left( B_{k-1}^0(X+1) - X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -\frac{1}{X} + Y \right) \right) \\
&\quad + \frac{2}{k-1} \left( Y^{k-2} B_{k-1}^0 \left( X - \frac{1}{Y} \right) - (XY)^{k-1} B_{k-1}^0 \left( -\frac{1}{X} - \frac{1}{Y} \right) \right) \\
&= -\frac{2}{k-1} \left( B_{k-1}^0(X+Y) - X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -\frac{1}{X} + Y \right) \right) |_Y(1-S) \\
&= -\frac{2}{k-1} (B_{k-1}^0(X+Y)) |_X(1-S) |_Y(1-S) \\
&= \frac{2}{k-1} (B_{k-1}^0(X+Y)) |_X(S-1) |_Y(1-S).
\end{aligned}$$

Wobei bei der ersten Umformung benutzt wird, dass  $B_{k-1}^0(X) = -B_{k-1}^0(-X)$  (Siehe Def. 1.8). Nun benutzen wir die Identität  $(S-1)\tilde{T}_n = T_n^\infty(S-1) + (1-T)U_n$  aus Satz 4.2.1 und erhalten nach der Anwendung von  $|_X\tilde{T}_n$  auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned}
c_{k1}(X, Y) |_X\tilde{T}_n &= \frac{2}{k-1} (B_{k-1}^0(X+Y)) |_X(S-1)\tilde{T}_n |_Y(1-S) \\
&= \frac{2}{k-1} (B_{k-1}^0(X+Y)) |_X(T_n^\infty(S-1) + (1-T)U_n) |_Y(1-S) \\
&= c_{k1}(X, Y) |_X\tilde{T}_n = \frac{2}{k-1} (\mathcal{T}_I |_X(S-1) + \mathcal{T}_{II} |_X U_n) |_Y(1-S).
\end{aligned}$$

Wobei  $\mathcal{T}_I := B_{k-1}^0(X+Y) |_X T_n^\infty$  und  $\mathcal{T}_{II} := B_{k-1}^0(X+Y) |_X(1-T)$ .

Als erstes werden wir nun  $\mathcal{T}_I$  vereinfachen mit Hilfe des folgenden Lemma

### 6.1. Lemma (J. L. Raabe, 1851)

Für das  $k-1$ -te Bernoullipolynom und einem  $d \in \mathbb{N}$  gilt:

$$B_{k-1}(dt) = d^{k-2} \sum_{b=0}^{d-1} B_{k-1} \left( t + \frac{b}{d} \right).$$

**Beweis:** Siehe [RA], S. 348ff. □

Wir betrachten nun  $\mathcal{T}_I = B_{k-1}^0(X+Y)|_X T_n^\infty$ . Nach der Definition von  $T_n^\infty$  und dem Lemma 6.1 erhält man:

$$\begin{aligned}
B_{k-1}^0(X+Y)|_X T_n^\infty &= \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} B_{k-1}^0(X+Y)|_X \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b=0}^{d-1} B_{k-1}^0(X+Y)|_X \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&= \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} d^{k-2} \sum_{b=0}^{d-1} B_{k-1}^0\left(\frac{aX+b}{d} + Y\right) \\
&= \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} d^{k-2} \sum_{b=0}^{d-1} B_{k-1}^0\left(\frac{1}{d}(aX+dY) + \frac{1}{d}\right).
\end{aligned}$$

Mit  $t = \frac{1}{d}(aX+dY)$  gilt nach der Definition von  $B_{k-1}^0$  (Siehe 1.8), dass  $B_{k-1}^0\left(t + \frac{b}{d}\right) = B_{k-1}\left(t + \frac{b}{d}\right) + \frac{(k-1)}{2}\left(t + \frac{b}{d}\right)^{k-2}$  und  $B_{k-1}^0(dt) = B_{k-1}(dt) - (k-1)B_1(dt)^{k-2} = B_{k-1}(dt) + \frac{(k-1)}{2}(dt)^{k-2}$ . Aus dem Lemma 6.1 folgt somit:

$$\begin{aligned}
d^{k-2} \sum_{b=0}^{d-1} B_{k-1}^0\left(t + \frac{b}{d}\right) &= B_{k-1}(dt) + d^{k-2} \sum_{b=0}^{d-1} \frac{(k-1)}{2} \left(t + \frac{b}{d}\right)^{k-2} \\
&= B_{k-1}(dt) + d^{k-2} \frac{(k-1)}{2} t^{k-2} + d^{k-2} \sum_{b=1}^{d-1} \frac{(k-1)}{2} \left(t + \frac{b}{d}\right)^{k-2} \\
&= B_{k-1}(dt) + \frac{(k-1)}{2} (dt)^{k-2} + d^{k-2} \sum_{b=1}^{d-1} \frac{(k-1)}{2} \left(t + \frac{b}{d}\right)^{k-2} \\
&= B_{k-1}^0(dt) + \sum_{b=1}^{d-1} \frac{(k-1)}{2} (dt+b)^{k-2}.
\end{aligned}$$

Zur Verkürzung setzen wir  $H_n := \sum_{\substack{ad=n \\ 0 < b < d}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$  und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_I &= \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \left( B_{k-1}^0(aX+dY) + \sum_{b=1}^{d-1} \frac{(k-1)}{2} (aX+dY+b)^{k-2} \right) \\
&= \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX+dY) + \frac{(k-1)}{2} (X+Y)^{k-2} |_X H_n.
\end{aligned}$$

Für die Vereinfachung  $\mathcal{T}_{II}$  benötigen wir folgende zwei Lemma

**6.2. Lemma**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt für die Bernoulli Polynome  $B_n$  die Identität:

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}.$$

**Beweis:** Siehe [WW], S. 127. □

**6.3. Lemma**

Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt die Identität

$$B_{k-1}^0(X+Y)|_X(1-T) = -\frac{k-1}{2}(X+Y)^{k-2}|_X(1+T).$$

**Beweis:** Wir setzen  $Z = X+Y$  und betrachten obige Aussage in einer Unbestimmten. Dies dürfen wir tun, da  $B_{k-1}^0(Z)|_Z T = B_{k-1}^0(Z+1) = B_{k-1}^0(X+Y+1)|_X T = B_{k-1}^0(X+Y)|_X T$ . Mit Hilfe des Lemma 6.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_{k-1}^0(Z)|_Z(1-T) &= B_{k-1}^0(Z) - B_{k-1}^0(Z+1) \\ &= B_{k-1}(Z) + \frac{k-1}{2}Z^{k-2} - \left( B_{k-1}(Z+1) + \frac{k-1}{2}(Z+1)^{k-2} \right) \\ &= B_{k-1}(Z) - B_{k-1}(Z+1) + \frac{k-1}{2}Z^{k-2} - \frac{k-1}{2}(Z+1)^{k-2} \\ &= -(k-1)Z^{k-2} + \frac{k-1}{2}Z^{k-2} - \frac{k-1}{2}(Z+1)^{k-2} \\ &= -\frac{k-1}{2}(Z^{k-2} + (Z+1)^{k-2}) \\ &= -\frac{k-1}{2}Z^{k-2}|_Z(1+T). \end{aligned}$$

Und somit gilt  $B_{k-1}^0(X+Y)|_X(1-T) = -\frac{k-1}{2}(X+Y)^{k-2}|_X(1+T)$ . □

Damit haben wir

$$\mathcal{T}_{\text{II}} = -\frac{k-1}{2}(X+Y)^{k-2}|_X(1+T).$$

Bisher haben wir also

$$\begin{aligned}
c_{k1}(X, Y)|_X \tilde{T}_n &= \frac{2}{k-1} (\mathcal{T}_I|_X(S-1) + \mathcal{T}_{II}|_X U_n)|_Y(1-S) \\
&= \frac{2}{k-1} \left( \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX+dY) + \frac{(k-1)}{2}(X+Y)^{k-2}|_X H_n \right) |_{X(1-S)}|_{Y(1-S)} \\
&\quad - (X+Y)^{k-2}|_X(1+T)U_n|_{Y(1-S)} \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX+dY)|_X(S-1)|_{Y(1-S)} \\
&\quad + (X+Y)^{k-2}|_X(H_n(S-1) - (1+T)U_n)|_{Y(1-S)}.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun noch den hinteren Teil umformen mit folgenden Lemma

#### 6.4. Lemma

Für  $M \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$  gilt

$$(X+Y)^{k-2}|_X M|_Y S = (X+Y)^{k-2}|_X S M.$$

**Beweis:** Es sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$  dann ist  $S M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$  und man erhält:

$$\begin{aligned}
(X+Y)^{k-2}|_X M|_Y S &= (X+Y)^{k-2}|_X M|_Y S \\
&= Y^{k-2} \left( X - \frac{1}{Y} \right)^{k-2} |_X M \\
&= (cX+d)^{k-2} Y^{k-2} \left( \frac{aX+b}{cX+d} - \frac{1}{Y} \right)^{k-2} \\
&= ((aX+b)Y - (cX+d))^{k-2} \\
&= (aX+b)^{k-2} \left( Y + \frac{-cX-d}{aX+b} \right)^{k-2} \\
&= (X+Y)^{k-2}|_X S M.
\end{aligned}$$

□

Indem wir nun zu erst Lemma 6.4 und dann Matrizen Relation I aus 4.3 auf den hinteren Term von  $c_{k1}(X, Y)|_X \tilde{T}_n$  anwenden und zum Schluss den vorderen Teil Ausschreiben (wobei

wieder  $B_{k-1}^0(X) = -B_{k-1}^0(-X)$  zu beachten ist), erhalten wir:

$$\begin{aligned}
c_{k1}(X, Y)|_X \tilde{T}_n &= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX + dY)|_X(S-1)|_Y(1-S) \\
&\quad + (X+Y)^{k-2}|_X (H_n(S-1) - (1+T)U_n)|_Y(1-S) \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX + dY)|_X(S-1)|_Y(1-S) \\
&\quad + (X+Y)^{k-2}|_X \left( \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX + dY)|_X(S-1)|_Y(1-S) \\
&\quad + \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cX+d)^{k-2} \left( \frac{aX+b}{cX+d} + Y \right)^{k-2} \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} B_{k-1}^0(aX + dY)|_X(S-1)|_Y(1-S) \\
&\quad + \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cXY + dY + aX + b)^{k-2} \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \left( X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -\frac{a}{X} + dY \right) - B_{k-1}^0(aX + dY) \right) |_Y(1-S) \\
&\quad + \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cXY + dY + aX + b)^{k-2} \\
&= \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \left( X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -\frac{a}{X} + dY \right) - B_{k-1}^0(aX + dY) \right) \\
&\quad - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \left( (XY)^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -\frac{a}{X} - \frac{d}{Y} \right) + Y^{k-2} B_{k-1}^0 \left( aX - \frac{d}{Y} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cXY + dY + aX + b)^{k-2} \\
&= \sum_{\substack{ad-bc=n \\ ad>0>bc}} \operatorname{sgn}(bd)(cXY + dY + aX + b)^{k-2} \\
&\quad - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \left( B_{k-1}^0(aX + dY) + X^{k-2} B_{k-1}^0 \left( \frac{a}{X} - dY \right) \right) \\
&\quad - \frac{2}{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \left( Y^{k-2} B_{k-1}^0 \left( -aX + \frac{d}{Y} \right) - (XY)^{k-2} B_{k-1}^0 \left( \frac{a}{X} + \frac{d}{Y} \right) \right).
\end{aligned}$$

Dies entspricht aber genau der rechten Seite von Theorem II und somit haben wir die Identität  $c_{k1}(X, Y)|_{\tilde{X}T_n} = c_{kn}(X, Y)$ , die wir zeigen wollten, um Theorem I zu beweisen.

□

## LITERATUR

- [FB] **Freitag E.; Busam R.:** *Funktionentheorie 1*, Springer-Verlag, 2006.
- [KK] **Koecher, M.; Krieg, A.:** *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer-Verlag, 2007.
- [SE] **Serre, J. P.:** *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, 1977.
- [DZ1] **Zagier, D.:** *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*, Invent. math 104, 449-465, Springer-Verlag, 1991.
- [DZ2] **Zagier, D.:** *Hecke Operators and Periods of Modular Forms*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol 3, 1990.
- [DZ3] **Zagier, D.:** *Modular Forms of one variable*, unpublished notes.
- [DZ4] **Choie, YJ.; Zagier, D.:** *Rational Period Functions for  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , A tribute to Emil Grosswald: Number theory and related analysis*, Contemporary Mathematics 143, 89-108, 1991.
- [RA] **Raabe, J. L.:** *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob Bernoullische Function*, J. reine angew. Math. 42, 348-376, 1851.
- [WW] **Whittaker, E. T.; Watson, G. N.:** *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Mathematical Library, 1990.
- [FI] **Fischer, G.:** *Lineare Algebra*, Vieweg, 2005.
- [MB] **Bargmann, M.:** *Periodenrelationen und der Satz von Haberland*, Uni-Hamburg, 2009.
- [AW] **Wiles, A.:** *Modular Elliptic Curves and Fermat's last theorem.*, Annals of Mathematics 141, 443-551, 1995.