Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Ulf Kühn

Übungen zur Vorlesung algebraische Geometrie, WS 2012/13

Aufgaben zum 27.11.2012

Aufgabe 16:
Sei C_f die Kurve gegeben durch $f = u^3 + v^4 - 1 \in k[u, v]$. Geben sie ein Beispiel für Kurven C_1, bzw. C_2, und reguläre Abbildungen $\varphi_1 : C_1 \to C_f$, bzw. $\varphi_2 : C_f \to C_2$, an.

Aufgabe 15:
Wie sieht die Garbifizierung der konstanten Prägarbe für $T = \mathbb{R}$ und $G = \mathbb{Z}$ aus?

Aufgabe 14:
Sei E über k gegeben durch die Weierstrass Gleichung

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

Finden Sie eine reguläre Abbildung die E in eine Gleichung der folgende Form überführt

$$y^2 = 4x^3 + b_2x^2 + 2b_4x + b_6.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung invertierbar ist.

Aufgabe 13:
Sei E eine nicht singuläre elliptische Kurve über einem perfekten Körper k. Zeigen Sie, dass es eine 1:1 Korrespondenz zwischen den Punkten $E(k)$ und den Elementen in $\mathrm{Pic}^0(E)$ gibt.

Aufgaben zum 20.11.2012

Aufgabe 12:
a) Geben Sie eine Prägarbe an die keine Garbe ist.
b) Sei T ein topologischer Raum. Definiere

$$\mathcal{F} := \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

für $\emptyset \neq U \subset T$ und $\mathcal{F}(\emptyset) := 0$. Für $V \subset U$ sei $res_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ die Einschränkungsabbildung $f \to f|_V$. Zeigen Sie, dass dies eine Garbe definiert.

Aufgabe 11:
Es sei C eine nicht singuläre projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Zeigen Sie $H^1(C, G) = 0$, wobei G die konstante Garbe ist.

Aufgaben zum 13.11.2012

Aufgabe 10:
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^1) = 0$.

Prof. Dr. U. Kühn · Geom. 331 ·Tel. (040) 42838-5185 · kuehn@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/kuehn

b) $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$.
c) * Wie sieht $\mathrm{Pic}(C)$ für eine ebene affine Kurve C aus?

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie die Schnittzahl der folgenden ebenen affinen Kurven über einem Körper k im Punkt $P = (0,0)$:

a) $C : y^2 = x^3$, $D_1 : x = 0$.
b) $C : y^2 = x^3$, $D_2 : y = 0$.
c) $C : y^2 = x^3$, $D_3 : y = x^2$.

Aufgabe 8:
Es sei $E/\mathbb{Q}$ die elliptische Kurve $E : y^2 = x^3 + 17$. Berechnen Sie

$$(P_1 + P_2) + P_3,\ P_1 + (P_2 + P_3) \text{ und } 2P_1$$

für die Punkte $P_1 = (-2,3)$, $P_2 = (-1,4)$ und $P_3 = (2,5)$ auf E.

Aufgabe 7:
Sei $C/\mathbb{Q}$ gegeben durch $C : y^2 = x^3 - 8x + 11x - 2012$. Bestimmen Sie die Primdivisoren auf C und geben Sie den Grad eines Primdivisors an.

Aufgaben zum 06.11.2012

Aufgabe 6:
Auf die letzte Aufgabe bereiten Sie sich mit dem Abschnitt "Hensel's Lemma" (Milne, Elliptic Curves, S.23-S.25) vor.
Betrachte die ebene affine Kurve $C : Y^2 = X^3 + p$. Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)$ auf der reduzierten Kurve $\mathbb{F}_p$ sich nicht auf $\mathbb{Z}_p^2$ fortsetzen lässt. Warum wird Hensel's Lemma nicht verletzt?

Aufgabe 5:
Sei $C : F(X,Y,Z)$ eine ebene projektive Kurve über $\mathbb{Q}$ vom Grad 3. Zeigen Sie: Wenn C einen singulären Punkt hat, dass dieser der Einzige und ein Doppelpunkt ist.

Aufgabe 4*:
Seien C, D zwei ebene affine Kurven und $P \in C \cap D$ ein isolierter Punkt. Zeigen Sie, dass

$$I(P, C \cap D) \geq m_P(C) \cdot m_P(D)$$

gilt. Gleichheit gilt genau dann, wenn C und D keine gemeinsame Tangente an P haben.

Aufgaben zum 30.10.2012

Aufgabe 3:
Sei $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ eine projektive ebene Kurve definiert durch $F = k[X,Y,Z]$ und $P \in C$. Zeigen Sie:

a) P ist genau dann singulär auf der affinen Kurve C_i, $i \in \{1,2,3\}$, wenn

$$F(P) = 0 = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_P = \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_P = \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_P.$$

b) Sei P nichtsingulär und L die projektive Gerade

$$L : \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_P X + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_P Y + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)_P Z = 0.$$

Dann ist $L \cap U_i$ die Tangente von C_i (für alle i) an P, so dass P in U_i liegt.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Eine ebene projektive Kurve ist die (eindeutige) Vereinigung von irreduziblen projektiven Kurven.

Aufgabe 1:
Sei $f(X) = X^m + s_{m-1}X^{m-1} ... + s_0 \in k[X]$ ein normiertes Polynom. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{res}(f, f') = (-1)^{m(m-1)/2}\mathrm{disc}(f)$$

gilt, wobei $\mathrm{disc}(f)$ die Diskriminante von f ist.