Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Ulf Kühn

FB Math.,Prof. Dr. U. Kühn,Bundesstr.55, 20146 HH

Algebra 2 Übungsaufgaben zur Abgabe am 29.10.2015

Aufgabe 1.1 (6 Punkte):
a) Zeigen Sie: Ist $A \to B$ ein Ringhomomorphismus so ist B ein A-Modul.

b) Zeigen Sie: Jeder Modul ist ein $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 1.2 (2 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

a) Das direkte Produkt von Ringen $\prod_{i\in I} R_i$ ist wieder ein Ring.

b) Die direkte Summe von Ringen $\bigoplus_{i\in I} R_i$ ist wieder ein Ring.

Aufgabe 1.3 (8 Punkte):
Beweisen Sie die Noetherschen Isomorphiesätze.

a) Sei $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $M/\ker f \cong \operatorname{im} f$

b) Seien $N, N' \subset M$ Untermoduln, dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $(N + N')/N \cong N'/(N \cap N')$.

c) Sind $N' \subset N \subset M$ Untermoduln, so ist $(M/N')/(N/N') \cong M/N$.

d) Rechnen sie obige Aussagen a)-c) für $N' = 6\mathbb{Z}$, $N = 3\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}$ nach.

Aufgabe 1.4 (3 Punkte):
Bestimmen Sie:

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.5 (3 Punkte):
Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Weiter sei A_1 das von $1 + \sqrt{-5}$ und 2 erzeugte Ideal in R und A_2 das von 2 erzeugte Ideal.

Berechnen Sie die R-Moduln $A_1 + A_2$, A_1A_1 und A_1A_2. Welcher dieser Moduln ist frei?

Prof. Dr. U. Kühn · Geom. 331 ·Tel. (040) 42838-5185 · kuehn@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/kuehn

Algebra 2 Übungsaufgaben zur Abgabe am 05.11.2015

Aufgabe 2.1 (8 Punkte):

Sei $(*):\ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.

a) Man sagt $(*)$ spaltet, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen i)-iii) gilt:

i) Es gibt ein $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M'', M)$ mit $g \circ \phi = \mathrm{id}$ ("g hat einen Schnitt").

ii) Es gibt ein $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$ mit $\psi \circ f = \mathrm{id}$ ("f hat eine Retraktion").

iii) Es gibt einen Isomorphismus $h : M \to M' \oplus M''$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0\ , \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota_1"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

hierbei sei ι_1 die natürliche Injektion und pr_2 die Projektion auf die zweite Komponente. Zeigen Sie, daß i) -iii) äquivalent sind.

b) Zeige falls $(*)$ spaltet, dann gibt es Isomorphismen $M \cong \mathrm{im}\, f \oplus \ker \psi$ und $M \cong \ker g \oplus \mathrm{im}\, \phi$.

Aufgabe 2.2 (4+2+2* Punkte):

Sei $(*):\ 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Zeigen Sie:

a) Für jeden A-Modul F ist auch die Sequenz (" Tensorieren mit $F \otimes_A$ -")

$$F \otimes_A M' \xrightarrow{f} F \otimes_A M \xrightarrow{g} F \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

exakt.

b) Falls $(*)$ spaltet, dann ist für jeden A-Modul F ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow F \otimes_A M' \xrightarrow{f} F \otimes_A M \xrightarrow{g} F \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

exakt.

c*). Was ändert sich falls wir $(*)$ mit $- \otimes_A F$ tensorieren.

Aufgabe 2.3 (8 Punkte):

Sei A ein Ring und P ein A-Modul. Man nennt P einen projektiver Modul, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

i) Sind $f \in \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ und $g \in \mathrm{Hom}_A(M, M'')$ gegeben, wobei g surjektiv sei, dann existiert ein $h \in \mathrm{Hom}_A(P, M)$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ii) Jede exakte Sequenz $0 \to M' \to M'' \to P \to 0$ spaltet.

iii) Es gibt einen A-Modul M, sodaß $P \oplus M$ ein freier Modul ist.

iv) Der Funktor $M \to \mathrm{Hom}_A(P, M)$ ist exakt.

Zeigen Sie, daß i) -iv) äquivalent sind.

Aufgabe 2.4 (6 Punkte):
Ein Modul M heißt flach, falls das Tensorieren mit $- \otimes_A M$ kurze exakte Sequenzen erhält. Zeigen oder widerlegen sie die Aussagen:

a) Projektive Moduln sind flach.

b) Flache Moduln sind projektiv.

c) Freie Moduln sind projektiv.

d) Flache Moduln sind frei.

Aufgabe 2.5 (6 Punkte):
Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Weiter sei A_1 das von $1 + \sqrt{-5}$ und 2 erzeugte Ideal in R und A_2 das von 2 erzeugte Ideal.

Welcher der R-Moduln A_1, A_2, $A_1 A_1$ und $A_1 A_2$ ist frei, projektiv, bzw. flach?