Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Ulf Kühn

Übungen zur Vorlesung algebraische Geometrie, WS 2016/17

Aufgabe 38:
Es sei C eine glatte projektive Kurve und $P_1, ..., P_r$ seien Punkte auf C. Zeigen Sie, dass es eine rationale Funktion f auf C gibt deren Pole in der Menge $\{P_1, ..., P_r\}$ enthalten sind und sonst überall regulär ist.

Aufgabe 37:
Es sei C eine Kurve vom Geschlecht g. Zeigen Sie, dass es einen Morphismus $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$ vom Grad $d \leq g + 1$ gibt.

Aufgabe 36:
Beweisen Sie: Ist C eine glatte Kurve und $P \in C$, dann gibt es eine affine Umgebung U von P, so dass $\Omega^1_C[U] \cong \mathcal{O}_C(U)$ als $\mathcal{O}_C(U)$-Modul.

Aufgabe 35:
a) Beschreiben Sie einen kanonischen Divisor auf $\mathbb{P}^1$.

b) Zeigen Sie, dass ein kanonischer Divisor auf der elliptischen Kurve

$$E \,:\, y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

gegeben ist durch dx/y.

Aufgabe 34:
Beschreiben Sie das durch $D = 4\infty$ gegebene Linearsystem auf einer elliptischen Kurve E.

Aufgabe 33:
Beschreiben Sie die durch $D = \infty, 2\infty, 3\infty, ... \subset \mathbb{P}^1$ bestimmten Linearsysteme und die dadurch induzierten Hyperebenenschnitte.

Aufgabe 32:
Gegeben sei der Punkt $P = (0, 0)$ auf der Kurve $C : x + y + y^3 + x^4 = 0$. Bestimme sie den $v_P(f)$ für $f = y(x^2 - y) \in k(C)$. Bestimmen Sie den Hauptdivisor zur Funktion $x + y \in k(C)$.

Aufgabe 31 :
Wiederholen sie im Selbststudium die Definition und die wichtigsten Eigenschaften von noetherschen lokalen Ringen und ebenso für Bewertungsringe.

Aufgabe 30:
Bestimmen sie für die Kurven $C_1 : y^2 + xy + x^3$ und $C_2 : y^2 + x + y + x^3$ jeweils $\mathfrak{m}_P$ im Punkt $P = (0, 0)$ und berechnen dann $\dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$.

Aufgabe 29:
Zeigen Sie: Ist P ein glatter Punkt auf einer Kurve C, so gilt $\dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = 1$.

Prof. Dr. U. Kühn · Geom. 331 ·Tel. (040) 42838-5185 · kuehn@math.uni-hamburg.de · www.math.uni-hamburg.de/home/kuehn

Aufgabe 28:
Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(i) Es gilt $I(P, C \cap D) = 1$ genau dann, wenn P sowohl C als auch auf D ein glatter Punkt ist und die Tangenten an P auf C bzw. D verschieden sind.

(ii) Es gilt stets:

$$I(P, C \cap D) \geq m_P(C) m_P(D),$$

wobei die Gleichheit genau dann auftritt, wenn C und D keine gemeinsame Tangente in P haben.

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die Schnittpunkte und deren Schnittmultiplizitäten für die durch die Polynome $x^3 + xy + y^2$, x und y bestimmten ebenen Kurven. Überprüfen sie in diesen Speziallfällen den Satz von Bezout.

Aufgabe 26:
Zeige oder widerlegen Sie: Ist $P = (0, 0)$ ein ordinärer singulärer Punkt mit Multiplizität m, dann ist das Urbild von C_f in der Aufblasung der Ebene im Ursprung in allen Urbildern von P nicht-singulär.

Aufgabe 25:
Gegeben sei $f(x, y) \in k[x, y]$ ein Polynom vom Grad d. Zeigen Sie, dass für einen Punkt $P = (a, b)$ auf der Kurve C_f gilt:

(i) P ist nicht singulär, genau dann wenn in der Zerlegung

$$f(x, y) = f_1(x - a, y - b) + ... + f_d(x - a, x - b),$$

wobei $f_1, ..., f_d$ homogen in $x - a$ und $y - b$ seien, gilt $f_1 \neq 0$.

(ii) Ist P singulär so gilt $f(x, y) = f_m(x - a, y - b) + ... + f_d(x - a, x - b)$ wobei f_m in ein Produkt von m Geraden zerfällt, d.h. $f_m(x, y) = \prod L_i^{r_i}$. Man nennt $m = m_P$ die Multipliziät von P.

Aufgabe 24:
Untersuche die Kurve C_f mit $f(x, y) = x^5 - x^3(1 - y) + x^2 - x + xy - y^2$ in den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 2)$. Wann wird Sie singulär? Wie sind die Tangentengleichungen?

Aufgabe 23*:
Beweisen Sie folgenden Satz (Noether-Normalisierung): Es sei k ein unendlicher Körper und $A = k[a_1, ..., a_n]$ eine endlich erzeugte k-Algebra. Dann gibt es ein $m \leq n$ sowie $y_1, ..., y_m \in A$, so dass:

(i) $y_1, ..., y_m$ sind algebraisch unabhängig über k, d.h. sie erfüllen keine Polynomgleichung mit Koeffizienten in k,

(ii) A ist eine endliche $k[y_1, ..., y_m]$-Algebra.

(iii) Ist k algebraisch abgeschlossen und A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, so ist $K | k(y_1, ..., y_m)$ eine separable Körpererweiterung, d.h. es gilt $K = k(y_1, ..., y_m)[y]$ für ein primitives Element y.

Aufgabe 22:
Zeigen oder widerlegen sie die Aussage: Eine nicht-leere Zariski-offene Teilmenge ist dicht.

Aufgabe 21:
Wiederholen Sie die ihnen bekannten Versionen der Definition eines Morphismus von Varietäten und vergleichen Sie diese anhand der Isomorphismen $U_i \cong \mathbb{A}^n$, wobei $U_i = \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ und die natürlichen Abbildungen wie in der Vorlesung gewählt seien.

Aufgabe 20:
Es bezeichne $k[K_V]_{(\mathfrak{m}_P)}$ die homogene Lokalisierung des Koordinatenringes des Kegels K_V einer irreduziblen projektiven Varietät V in dem Punkt P und weiter sei $\mathcal{O}_{V,P}$ der lokale Ring von V in P. Zeigen Sie

$$\mathcal{O}_{V,P} \cong k[K_V]_{(\mathfrak{m}_P)}.$$

Aufgabe 19:
Zeigen Sie, dass durch die Zuordnung $X \mapsto X_0 = X \cap U_0$ eine Bijektion

$$\left\{ \begin{matrix} \text{irreduzible Varietäten} \quad X \subset \mathbb{P}^n \\ \text{mit} \quad X \not\subset U_0 = \{x_0 = 0\} \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{irreduzible affine Varietäten} \\ X_0 \subset \mathbb{A}^n \end{matrix} \right\}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 18:
Bestimmen Sie die Punkte im Unendlichen, d.h. den projektiven Abschluss, der affinen Kurve $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.

Aufgabe 17:
(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{A}^2 \backslash \{(0,0)\}$ weder zu einer affinen noch zu einer projektiven Varietät isomorph ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^2 \backslash \{(1:0:0)\}$ weder zu einer affinen noch zu einer projektiven Varietät isomorph ist.

Aufgabe 16:
Beweisen Sie den projektiven Nullstellensatz (Sie dürfen dabei den affinen Nullstellensatz benutzen).

Aufgabe 15:
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n$ ist eine Topologie.

Aufgabe 14:
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Für ein Ideal I in einem graduierten Ring R gilt:

(i) I ist genau dann homogen, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

(ii) I sei ein homogenes Ideal. Dann ist I genau dann ein Primideal, falls für je zwei Elemente f, g gilt: Ist $fg \in I$ so ist $f \in I$ oder $g \in I$.

(iii) Summen, Produkte, Durschschnitte und Radikale von homogenen Idealen sind wieder homogene Ideale.

Aufgabe 13:
Wiederholen sie im Selbststudium die Definition und die wichtigsten Eigenschaften der Lokalisierung von Ringen.

Aufgabe 12:
Zeigen Sie, sind $f, g \in k[x_1, ..., x_n]$ und $a_1, ..., a_n \in k$, dann gilt

$$f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) \in \big(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n\big)$$

und genau dann wenn $g(a_1, ..., a_n) = 0$ gilt

$$g(x_1, ..., x_n) \in \big(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n\big).$$

Aufgabe 11*:
Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologie auf den beiden Faktoren $\mathbb{A}^1$ ist.

Aufgabe 10:
Für eine endlich erzeugte k-Algebra R seien

$$D(I) = \big\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R) \,\big|\, I \not\subset \mathfrak{m}\big\}$$

die offenen Mengen in $\operatorname{Spm}(R)$ und $V(I) = D(I)^c = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R) \,|\, I \subset \mathfrak{m}\}$. Zeigen oder widerlegen Sie die Aussagen:

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f), \qquad V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f).$$

Jede offene Teilmenge $U \subset \operatorname{Spm}(R)$, bzw. jede abgeschlossene Teilmenge F ist von obiger Gestalt $D(J)$ bzw. $V(J)$ für ein Ideal von R. Die so erhaltene Topologie stimmt mit der vorigen Definition der Zariski-Topologie überein.

Aufgabe 9:
Sei R eine endlich erzeugte k-Algebra (mit $k = \overline{k}$) von der Gestalt $R = k[x_1, ..., x_n]/J$. Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage

$$\operatorname{Spm}(R) = V(J).$$

Aufgabe 8:
Es sei $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \text{Frob}: & \mathbb{A}^n & \to & \mathbb{A}^n, \\ & (x_1, ..., x_n) & \mapsto & (x_1^p, ..., x_n^p) \end{array}$$

heißt Frobeniusabbildung.

(a) Zeigen Sie, dass Frob ein bijektiver Morphismus ist.

(b) Ist Frob ein Isomorphismus?

Aufgabe 7:
Beweisen Sie, dass die Hyperbel

$$C := \big\{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \,\big|\, xy = 1\big\}$$

nicht isomorph zu $\mathbb{A}^1$ ist.

Aufgabe 6:
Zeigen Sie, für die Kurve $C = V((y - x^2))$ gilt $k[C] \cong k[t]$.

Aufgabe 5:
Welche der folgenden algebraischen Mengen sind irreduzibel?

$$V((xy^3)), \quad V((x^2 + y^3 + xy)), \quad V((x^2 + y^3 + xy, xy^3)), \quad V((xy + yz + zx + xyz))$$

Skizzieren bzw. beschreiben sie diese algebraischen Mengen.

Aufgabe 4:
Bestimmen sie die abgeschlossenen Mengen von $\mathbb{A}^1_k$ bezüglich der Zariski-Topologie. Erfüllt die Zariski-Topologie das Hausdorffsche Trennungsaxiom?

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Die maximalen Ideale von $\mathbb{R}[x]$ sind entweder von der Gestalt $(x - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ oder $(x^2 + ax + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 - 4b < 0$.

Aufgabe 2*:
Zeigen Sie: Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{m} \subset k[x_1, ..., x_n]$ ein maximales Ideal, so gilt $k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{m} \cong k$.

Aufgabe 1:
Zeigen Sie: Ist $V \subsetneq \mathbb{A}^1_k$ eine algebraische Menge, so ist V eine endliche Menge.