

2. Übung zur Algebraischen Graphentheorie

Aufgaben zum 2.5.2008.

1. Wieviele Spannbäume besitzt ein vollständig bipartiter Graph?
2. Sei D ein schlingenloser Multidigraph. Zeigen Sie, daß $g \in \mathbb{R}^{E(D)}$ genau dann im Schnittraum von D liegt, wenn für jeden geschlossenen Kantenzug W von D die Summe der $g(e)$ aller Vorwärtskanten e gleich der Summe der $g(e)$ aller Rückwärtskanten e von W ist.
3. Sei D eine Orientierung des schlingenlosen Multigraphen G . Zeigen Sie, daß die im Abschnitt 1.3 definierte Abbildung $B_G : \mathbb{R}^{E(D)} \rightarrow \mathbb{R}^{\vec{E}(G)}$ den Zyklusraum bzw. Schnittraum von D auf den Zyklusraum bzw. Schnittraum der Richtungen von G abbildet.
4. (+) Zeigen Sie, daß zu jedem ein Netzwerk $N = (D, r, s)$, in dem die Kanten mit $r(e) = 0$ keine Kreise in D bilden, genau ein Paar f, g von Strömen und Spannungen existiert, daß dem OHMSchen Gesetz und den beiden KIRCHHOFF-Regeln genügt.
5. Sei D ein schlingenloser Multigraph, e_0 eine Kante von p nach q , und $P := I(D)|(V - \{p, q\}) \times (E - \{e_0\})$. Zeigen Sie für $E_0 \subseteq E(D) - \{e_0\}$ mit $|E_0| = |V(D)| - 2$, daß $\det P|(V - \{p, q\}) \times E_0$ gleich ± 1 ist wenn $E_0 \cup \{e_0\}$ Kantenmenge eines Spannbauums von D ist und 0 sonst.
6. Die WHEATSTONE-Brücke ist ein spezielles Netzwerk $N = (D, r, s)$, wobei $D = (\{a, b, c, d\}, \{ab, ac, bd, cd, da\})$ mit spezieller Kante $e_0 := da$ ist. Unter welchen Bedingungen verschwindet das Potentialgefälle von b nach c ?
7. K_4^- bezeichne den vollständigen Graphen auf vier Ecken, vermindert um genau eine Kante. Bis auf Isomorphie gibt es genau drei Möglichkeiten, ihn durch Hinzufügen einer Kante e_0 mit zwei Enden zu einem Multigraphen zu erweitern. Alle drei Resultate sind plättbar. Betrachten Sie jeweils eine beliebige Orientierung und das resultierende spezielle Netzwerk mit spezieller Kante e_0 und Widerstand 1 auf allen von fünf von e_0 verschiedenen Kanten und konstruieren Sie daraus quadrierte Rechtecke.
8. (+) Zeigen Sie, daß die am Ende des Abschnitts 1.4 angegebene Konstruktion ein quadriertes Rechteck liefert.