Grundbildung Analysis

Blatt 9 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

49. Wir definieren die **Tangens**-Funktion durch $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von $\tan$.

(b) Zeigen Sie, dass $\tan(x+\pi) = \tan(x)$, d. h., die Tangens-Funktion ist π-periodisch.

(c) Zeigen Sie $\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + (\tan x)^2$.

(d) Skizzieren Sie den Graphen im Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

(e) Geben Sie eine geometrische Deutung des Funktionswertes für einen Winkel (gemessen im Bogenmass) am rechtwinkeligen Dreieck und am Einheitskreis (analog zu den bekannten Deutungen für $\sin$ und $\cos$). Können Sie sich den Namen erklären?

50. Wahr oder falsch?

(a) Das Bisektionsverfahren konvergiert immer.

(b) Ein Polynom vom Grad n ist genau $n+1$-mal differenzierbar.

(c) Jede rationale Funktion ist beliebig oft differenzierbar.

(d) $\sin$ ist differenzierbar, $\cos$ aber nicht.

(e) π ist die kleinste positive Nullstelle der $\tan$-Funktion.

Hausaufgaben

51. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von folgenden Funktionen [9 Punkte]

(a) $g(x) = 3^x$; (b) $h(x) = \log_a(x)$; (c) $k(x) = e^{\sin x}$.

bitte wenden!

52. *Die Zahl π*

Ergänzen Sie nebenstehende Wertetabelle aus der Vorlesung (mit Begründung).

Leiten Sie alleine unter Verwendung der Tabelle, der Additionstheoreme und der Symmetrieeigenschaften folgende Aussagen her.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0		
$\cos x$	1	0	-1		

(a) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

(b) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ und $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

(c) $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

(d) Welche Bedeutung haben die obigen Aussagen (a)–(c) für die Graphen der Funktionen sin und cos ?

53. *Additionstheoreme und eine Anwendung* [15 Punkte]

(a) Leiten Sie aus der Beziehung $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Additionstheoreme (siehe Satz (20.3.2)) für cos und sin her.

(b) Leiten Sie daraus Formeln für $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ und $\sin(3x)$ ab, in denen nur $\cos x$, $\sin x$ und ganze Zahlen vorkommen (bei $\sin(3x)$ kein cos).

(c) Zeigen Sie: $\sin(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3}\right) - 4\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)^3.$

(d) Für $x \in \,]-1, 1[$ kann man sin sehr effizient durch eine Partialsumme annähern. Bei der k-ten Partialsumme ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{(2k+3)!}$ (kein Beweis verlangt). Begnügt man sich mit einem Fehler $< \frac{1}{100}$, braucht also man nur zwei Summanden (erste Partialsumme!).

Bestimmen Sie eine Näherung für $\sin(1.5)$ auf zwei Wegen:

i. indem Sie die Potenzreihe für $\sin(0.5)$ benutzen und dann (c).

ii. indem Sie direkt in die Reihe einsetzen; auch mit mehr Summanden.

iii. [4 Zusatzpunkte] Wie könnte man einen Rechner programmieren, um die Funktionen sin und cos (näherungsweise) auszurechnen? Benutzen Sie dazu auch die Ergebnisse aus Aufgabe 52.