Grundbildung Analysis

Blatt 10 WiS 2021/22 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

54. Gegeben sei die Funktion $f(x)$. Jede differenzierbare Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ wird eine **Stammfunktion** von f genannt. Manche sprechen auch von **Aufleitung**.

(a) Zeigen Sie: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann auch $F(x) + C$ für jedes $C \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = F(x) + C$.

(c) Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) = 2x^3, \qquad g(x) = x^{-1}, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

55. Wahr oder falsch?

(a) Die Ableitung der $\tan$-Funktion ist auf dem gesamten Definitionsbereich positiv. Daher ist $\tan$ streng monoton wachsend.

(b) Ist die erste Ableitung in x_0 gleich Null, so liegt in x_0 ein lokales Extremum vor.

(c) Liegt in x_0 ein lokales Extremum vor, so ist die erste Ableitung in x_0 gleich Null.

(d) Wird die Steigung einer Funktion auf einem Intervall immer kleiner, so ist die zweite Ableitung dort negativ.

(e) In einem lokalen Maximum kann kein Wendepunkt liegen.

Hausaufgaben

56. *Die Umkehrfunktion des Tangens*

Wir betrachten die **Tangens**-Funktion $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ aus Aufgabe 49.

(a) Zeigen Sie, dass $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und surjektiv ist.

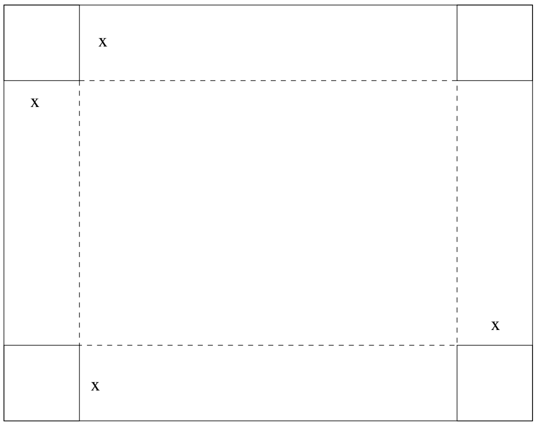
(b) Folgern Sie die Existenz der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ and bestimmen Sie die Ableitung dieser Funktion.

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ (beachte $\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$).

bitte wenden!

57. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$ nach dem Schema „Kurvendiskussion“ aus der Vorlesung. Besitzt die Funktion Asymptoten? Welche?

58. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit Seitenlängen 6 und 9 soll eine Schachtel geformt werden. Dazu wird an jeder Ecke ein quadratisches Stück der Länge x ausgeschnitten (siehe Skizze). Anschließend werden die verbleibenden Stücke an den Seiten entlang der gestrichelten Linien hoch geklappt und verklebt.



(a) Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Schachtel maximal wird.

(b) Wie groß ist das Volumen?