Grundlagen der Mathematik

Blatt 8 WiS 2020/21 — H. Kiechle

Präsenzaufgaben

44. *Folgen und Rekursion*

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Schreibt man die Zahlen $1, \dots, n$ in irgendeiner Reihenfolge auf, so spricht man von einer n-**Versetzung**. So ist z.B. $2, 1, 3$ eine 3-Versetzung. Für die Anzahl aller n-Versetzungen schreiben wir v_n und erhalten eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Bestimmen Sie v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

(b) Können Sie eine allgemein gültige Formel angeben, mit der man aus v_n die Zahl v_{n+1} ausrechnen kann?

(c) Was ist also v_6, v_7 ?

45. Wahr oder falsch?

(a) Die Abbildung $\mathrm{id} : A \to A; x \mapsto x$ ist bijektiv.

(b) $\operatorname{Pot}\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

(c) Die „Anzahl der Elemente" von $\mathbb{N}$ kleiner als die von $\mathbb{Z}$.

Hausaufgaben

46. Beweisen Sie, dass die folgende Abbildung bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}; n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{für} \quad n \in 2\mathbb{N} - 1 \quad (n \text{ ungerade}) \\ -\frac{n}{2} & \text{für} \quad n \in 2\mathbb{N} \qquad\quad (n \text{ gerade}) \end{cases} .$$

bitte wenden!

47. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Suchen Sie eine bijektive Abbildung $f : [0,1] \to [a,b]$ mit der Eigenschaft $f(0) = a$ und $f(1) = b$, die möglichst einfach ist.

Tipp: Geradengleichung.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $a = -2$ und $b = 3$.

(b) Die gefundene Abbildung ist bijektiv.

(c) Die Intervalle $[0,1]$ und $[a,b]$ sind gleichmächtig.

(d) Je zwei nicht leere, abgeschlossene Intervalle sind gleichmächtig.

48. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Folgenglieder a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 mit einem Taschenrechner; oder von Hand. Was fällt Ihnen auf?

(b) Untersuchen Sie die Folge $b_1 = 1$ und $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right)$ mit einer Tabellenkalkulation.

Wählen Sie verschiedene Werte von x, darunter $x = 2$, $x = 625$ und einer mindestens 10-stellig Zahl (Spaltenbreite anpassen; je eine neue Tabelle!).

(c) Können Sie Ihre Vermutung durch eine geeignete Rechnung (neue Spalte in der Tabelle) bestätigen?

(d) Untersuchen Sie was passiert, wenn Sie den Startwert ändern, z.B. 0, oder eine negative Zahl.

Hinweis: Eine Anleitung zur Nutzung einer Tabellenkalkulation und eine Beispiel-Datei finden Sie im Netz. Gestalten Sie Ihre Lösungsdatei ähnlich der Beispiel-Datei. Geben Sie bitte möglichst eine pdf-Datei ab.