Grundbildung Geometrie

Schon im 2. Semester haben wir in (15.2) gezeigt

(4.8) Umkreismittelpunkt

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt U $\left[= m_{A,B} \cap m_{A,C} \cap m_{B,C}\right]$

Der Punkt U ist zugleich Mittelpunkt des *Umkreises*.

Der **Umkreis** einer geometrischen Figur ist ein Kreis, auf dem alle Punkte der Figur liegen.

Der Satz besagt, dass jedes Dreieck (genau) einen Umkreis besitzt.
Bei Vierecken ist das nicht so!

Beweis

Sei $U := m_{A,B} \cap m_{B,C}$, dann folgt

$$|AU| = |BU| = |CU| \implies U \in m_{B,C}$$

und alle Punkte liegen auf einem Kreis um U mit Radius $|AU|$. $\square$

Definition

Gegeben sei ein Dreieck ABC.
Den Umkreis des Mittendreieck von ABC nennt man auch **Feuerbachkreis**.
Den Mittelpunkt des Feuerbachkreises bezeichnen wir mit F.

Definition

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Das Lot durch A auf die Seite BC heißt **Höhe** h_A. Entsprechend für h_B und h_C.
Formal:

$$h_A = (A \perp BC), \quad h_B = (B \perp AC), \quad h_C = (C \perp AB),$$

(4.9) Höhenschnittpunkt

- Die Höhen eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt

$$H = h_A \cap h_B \cap h_C$$

- Die Punkte S, U, H, F liegen alle auf einer Geraden
- Der Höhenschnittpunkt des Mittendreiecks ist U.

Die Gerade auf der die Punkte S, U, H, F liegen heißt **Eulergerade**.

Bemerkung

1.) Den Satz (4.9) haben wir im 2. Semester in (15.3) schon rechnerisch gezeigt.

2.) Nur bei einem gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte S, U, H, F zusammen und die Eulergerade ist nicht wohldefiniert.

3.) Direkt aus (4.7.3) und den Beziehungen $\sigma(U) = H$ und $\sigma(F) = U$ ergeben sich die Teilverhältnisse

$$|HS| : |SU| = 2 : 1 \quad \text{und } F \text{ ist die Mitte von } U \text{ und } H.$$