II. Abbildungen in der Geometrie

§ 4. Dilatationen

Definition

Jede Abbildung der Form

$$\Psi_{\lambda,\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ X \mapsto \lambda X + \mathbf{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

heißt **Dilatation** mit **Streckungfaktor** λ.

Grundbildung Geometrie

Spezialfälle

$\lambda = 1$	$\Psi_{1,\mathbf{v}}$ heißt **Translation** oder **Verschiebung**. Es gibt „keinen Streckungsfaktor“.
$\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (0,0)$	$\Psi_{1,(0,0)} = \mathrm{id}$
$\lambda = -1$	$\Psi_{-1,\mathbf{v}}$ heißt **Punktspiegelung**
$\lambda \neq 1$	$\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$ heißt (zentrische) **Streckung**
$\lambda = 0$ (!)	$\Psi_{0,\mathbf{v}}(X) = \mathbf{v}$ ist konstant, also keine Dilatation.

Grundbildung Geometrie

(4.1) Eigenschaften

Für jede Dilatation $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, gilt:

(1) $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\Psi_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1}\mathbf{v}}$

(2) Für jede Gerade g gilt $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(g)$ ist eine Gerade, die zu g parallel liegt: $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(g) \| g$

(3) Für alle $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ mit $C \neq D$ gilt

$$\frac{|A, B|}{|C, D|} = \frac{|\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(A), \Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(B)|}{|\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(C), \Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(D)|}$$

d. h. $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$ erhält das Verhältnis von Abständen.

(4) $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$ erhält Winkel. Genauer: für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

$$\angle ABC = \angle \Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(A)\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(B)\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}(C)$$

(4.1) Eigenschaften — Fortsetzung

(5)

- Im Fall $\lambda = 1$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, besitzt $\Psi_{1,\mathbf{v}}$ keine Fixpunkte.
- Im Fall $\lambda \neq 1$ besitzt $\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}$ genau einen Fixpunkt, nämlich

$$\frac{1}{1-\lambda}\mathbf{v} \qquad \text{genannt } \textbf{Zentrum} \text{ der Streckung.}$$

(6)

- Im Fall $\lambda = 1$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, besitzt $\Psi_{1,\mathbf{v}}$ genau eine Parallelklasse von Fixgeraden, nämlich alle Geraden der Form $P + \mathbb{R}\mathbf{v}$, $P \in \mathbb{R}^2$.

  $\mathbb{R}\mathbf{v}$ heißt **Richtung** der Translation.

- Im Fall $\lambda \neq 1$ sind genau die Geraden durch das Zentrum Fixgeraden.

(7) $\mathcal{D} := \left\{\Psi_{\lambda,\mathbf{v}}\,;\ \lambda \in \mathbb{R}^*, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\right\}$ bildet mit der Verkettung von Abbildungen eine Gruppe.

Bemerkungen

1.) Man kann zeigen, dass die Menge $\mathcal{D}$ aller Dilatationen, genau die Menge aller Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$ ist, Geraden auf parallel Geraden abbildet.

2.) Man kann weiter zeigen, dass die Menge $\mathcal{T}$ der Translationen genau aus den fixpunktfreien Dilatationen und der Identität besteht.

3.) $\mathcal{T}$ bildet eine kommutative Untergruppe von $\mathcal{D}$.