Beweis mit Induktion nach n.

$n = 1$: Es gilt

$$a - K_1 \cdot b =: R_1 < b \iff a = K_1 \cdot b + R_1$$
$$\iff \frac{a}{b} = K_1 + \frac{R_1}{b}$$

mit $\frac{R_1}{b} = \mathrm{Rest}_1 < 1$.

Grundbildung Geometrie

$n-1 \rightsquigarrow n$:

$$\frac{a}{b} = K_1 + \cfrac{1}{K_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{K_{n-2} + \cfrac{1}{K_{n-1} + \text{Rest}_{n-1}}}}} \qquad \text{mit} \quad \text{Rest}_{n-1} < 1$$

Wir können Rest_{n-1} von 1 genau K_n mal wegnehmen, d.h.

$$\frac{1}{\text{Rest}_{n-1}} = K_n + \text{Rest}_n \qquad \text{mit Rest}_n < 1$$

also

$$\text{Rest}_{n-1} = \frac{1}{K_n + \text{Rest}_n}$$

Einsetzen zeigt die Behauptung. $\square$

Grundbildung Geometrie

Beispiel 1

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}}$$

Beispiel 2

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+r}}} \quad \text{mit } 0 < r < 1$$

$r = 0$: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+0}}} = \frac{17}{12} \approx 1.4167$

$r = 1$: $\sqrt{2} > 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}} = \frac{24}{17} \approx 1.4117$

Beispiel 3

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

Ein Muster ist nicht erkennbar; auch nicht wenn man sehr viel weiter geht.

Im Unterschied dazu hat die Folge der Koeffizienten des Kettenbruchs der Eulerschen Zahl e ein einfaches Muster.

Anwendungen

1.) Der größte gemeinsame Teiler

Zwei ganze Zahlen habe 1 als gemeinsames Maß.
Das größte gemeinsame Maß ist der größte gemeinsame Teiler

2.) Gregorianischer Kalender

$$\frac{365,2422}{29,\ldots} \approx \frac{235}{19}$$

In 19 Jahren hat der Mond 235 Zyklen $\;$ (Fehler $< 0,16 \cdot 10^{-3}$).

3.) Klaviertastatur

Wieviele Tasten muss ein Klavier haben, damit bei *gleichstufiger Stimmung* die Quinten in allen Tonarten möglichst sauber sind?