Grundbildung Geometrie

(3.1) Der Algorithmus von Euklid

Es seien a und b kommensurable Strecken.

- Man nehme jeweils die kleinere von der größeren weg
- Dann erhält man nach endlich vielen Schritten zwei gleichlange (kongruente) Strecken s
- s ist das **größte gemeinsame Maß** von a und b

Bemerkung

Ist z.B. $b < a$, so wird b so oft von a weggenommen, bis die verbleibende Strecke $< b$ ist.
Formal: (bei $q \in \mathbb{N}$ Schritten)

$$a - q \cdot b < a \quad \text{oder} \quad a = q \cdot b + r \quad \text{mit } r < b$$

Das entspricht genau der *Division mit Rest* in $\mathbb{N}_0$

Beweis

Da a und b kommensurabel sind, existieren $n, m \in \mathbb{N}$ und eine Strecke s mit

$$a = n \cdot s \quad \text{und} \quad b = m \cdot s.$$

Ohne Einschränkung sei $b < a$, also auch $m < n$.

Annahme: Man findet für bestimmte a, b keine gleichlange Strecke nach endlich vielen Schritten.
Dann existieren solche Strecken mit minimalen n und m
$\triangleright$ „kleinste Verbrecher“.
Betrachte nun $a' := a - b$ und b.
Es gilt $a' = (n - m) \cdot s$ und $n - m < n$,
daher funktioniert der Algorithmus für a' und b und liefert ein größtes gemeinsames Maß s'.
Dann ist aber s' ein größtes gemeinsames Maß der Strecken a und b. $\square$