Geometrie I

Skript zur Vorlesung

Hubert Kiechle

WiS 2006/07

Inhaltsverzeichnis

1 Inzidenzräume

Definition. Seien P, $\mathfrak{G}$ Mengen und $I \subseteq P \times \mathfrak{G}$ eine Relation, genannt *Inzidenzrelation*. Das Tripel $(P, \mathfrak{G}, I)$ heißt dann auch *Inzidenzstruktur*.

$(P, \mathfrak{G}, I)$ heißt *Inzidenzraum* (oder *linearer Raum*), wenn gilt:

(I1) $\forall x, y \in P,\ x \neq y,\ \exists_1 G \in \mathfrak{G}$ mit x, yIG (Bezeichnung: $\overline{x, y} := G$)

(I2) $\forall G \in \mathfrak{G} : \exists x, y \in P,\ x \neq y,$ mit x, yIG.

Bemerkung. 1. Elemente aus P heißen *Punkte*, Elemente aus $\mathfrak{G}$ heißen *Geraden*.

2. Im Falle xIG sagen wir „x liegt auf G", „G geht durch x", „x inzidiert mit G" und ähnliche geometrische Sprechweisen.

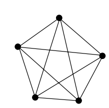
3. Gelegentlich wird ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch einfach mit P bezeichnet.

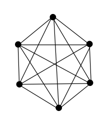
4. Bei der Darstellung endlicher Inzidenzräume werden die Punkte in die euklidische Ebene gezeichnet und mit Kurven verbunden, um die Geraden anzudeuten. Die Geraden bestehen dann ausschließlich aus den vorher markierten Punkten, die durch jeweilige die Kurve verbunden sind. Die anderen Punkte auf den Kurven sind keine Punkte der Geometrie (vgl. die folgenden Beispiele).

5. Insbesondere, müssen Geraden nicht „anschaulich gerade" sein, d. h. sie müssen nicht in der euklidischen Ebene als Geraden darstellbar sein.

(1.1) Beispiele. (1) $P = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = 6$), $I = \in$.

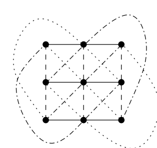
(2) Allgemeiner: sei P eine beliebige Menge, $\mathfrak{G} = \{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\}$ (also $|\mathfrak{G}| = \binom{n}{2}$ falls $|P| = n \in \mathbb{N}$), $I = \in$. Dann heißt $(P, \mathfrak{G}, I)$ auch *vollständiger Graph*.

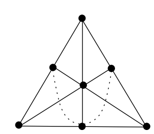




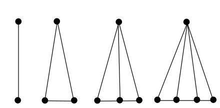
(3) durch die linke Figur definiert.

(4) durch rechte Figur definiert.





(5) Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen $x_0, \ldots, x_n$ seien P und $\mathfrak{G}$ wie folgt definiert: $P = \{x_0 \ldots x_n\}$, $\mathfrak{G} = \{\{x_1 \ldots x_n\}\} \cup \{\{x_0, x_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dann ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum, genannt *near-pencil*.



(6) Mit $P = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{G} = \{a + b\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\}$ ist $(P, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum, genannt *affine Ebene* über $\mathbb{R}$, oder *Anschauungsebene*. Wir schreiben dafür $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ (AG = „affine Geometrie").

Beweis. Wir zeigen die Aussage für beliebige Körper K statt $\mathbb{R}$. (K muss nicht einmal kommutativ sein.)

(I1) Seien $x, y \in P = K^2, x \neq y$. Dann gilt $x, y \in x + (y - x)K \in \mathfrak{G}$.

Eindeutigkeit: seien $x, y \in a + bK$, dann existieren $\lambda, \mu \in K$ mit $x = a + b\lambda$, $y = a + b\mu$, $\lambda \neq \mu$. Es gilt

$$y - x = b(\mu - \lambda) \implies (y - x)K = bK \quad \text{und} \quad x + bK = a + b\lambda + bK = a + bK.$$

Daher existiert genau eine Verbindungsgerade.

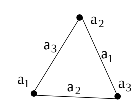
(I2) ist klar. Somit ist P ein Inzidenzraum. ■

(7) Das geht sehr viel allgemeiner: Sei (V, K) ein Vektorraum. Wir setzen $\mathfrak{G} = \{a + bK\,;\ a, b \in V, b \neq 0\}$. Dann ist $\mathrm{AG}(V, K) = (V, \mathfrak{G}, \in)$ ein Inzidenzraum.

$\mathrm{AG}(V, K)$ wird auch *affine Ableitung* des Vektorraums (V, K) genannt, bzw. als *affiner Koordinatenraum* bezeichnet. Bsp. (6) ist der Spezialfall $V = \mathbb{R}^2$. Der Beweis kann wörtlich von oben übernommen werden.

(8) Zu $P = \{a\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$, $\mathfrak{G} = \{a\mathbb{R} + b\mathbb{R}\,;\ a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig$\}$ ist $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R}) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ ein Inzidenzraum. Übung.

(9) $P = \{a_1, a_2, a_3\} = \mathfrak{G}$, $a_i I a_j \iff i \neq j$.



(10) Zu $P = \{a\mathbb{R}\,;\ a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$, setze

$$a\mathbb{R}\, I\, x\mathbb{R} \iff a^{\mathrm{T}} x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

Dann ist (P, P, I) ein Inzidenzraum. Übung.

(11) In $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ betrachte das Innere H des Einheitskreises (oder eine andere nicht leere Teilmenge). Setze $\mathfrak{G}_H := \{G \in \mathfrak{G}\,;\ |G \cap H| \geq 2\}$ und $xIG \iff x \in G$, dann ist $(H, \mathfrak{G}_H, I)$ ein Inzidenzraum.

(1.2) Bemerkung. Man kann immer erreichen, dass $P \cap \mathfrak{G} = \varnothing$:
Ist $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum, so kann man jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit der Menge der Punkte identifizieren, die mit G inzident sind, d.h.

$$G' := \{x \in P\,;\ xIG\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}' = \{G'\,;\ G \in \mathfrak{G}\}.$$

Dann ist $(P, \mathfrak{G}', \in)$ ein Inzidenzraum *isomorph* zum ursprünglichen (Beweis siehe unten!).
Im Folgenden darf also, wenn $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum ist, oE $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(P)$ und $I = \in$ vorausgesetzt werden. Auf die explizite Nennung der Inzidenzrelation $\in$ kann dann verzichtet werden und wir schreiben $(P, \mathfrak{G})$ statt $(P, \mathfrak{G}, \in)$.

Definition. Sei ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ gegeben. Eine Punktmenge $A \subseteq P$ heißt *kollinear*, wenn es eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ gibt mit $\forall a \in A: \ aIG$. Eine Geradenmenge $B \subseteq \mathfrak{G}$ heißt *kopunktal*, wenn es einen Punkt $x \in P$ gibt mit $\forall G \in B: \ xIG$.

Seien $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ Inzidenzräume. Eine Bijektion $\sigma : P \to P'$ heißt *Kollineation* oder *Isomorphismus* wenn $\forall x, y, z \in P$ gilt:

$$\{x, y, z\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P) \Leftrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\} \text{ ist kollinear (bzgl. } P')$$

Im Falle $(P, \mathfrak{G}, I) = (P', \mathfrak{G}', I')$ heißt σ *Automorphismus.*

Vorsicht! Es genügt nicht, dass $P = P'$ ist.

Existiert zwischen zwei Inzidenzräumen $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(P', \mathfrak{G}', I')$ eine Kollineation, so heißen die Inzidenzräume *isomorph*. Man schreibt auch $(P, \mathfrak{G}, I) \cong (P', \mathfrak{G}', I')$, oder kürzer $P \cong P'$.

Beweis (von Bem. (1.2)). Die Abbildung $\mathrm{id} : P \to P$ ist ein Isomorphismus von $(P, \mathfrak{G}, I)$ auf $(P, \mathfrak{G}')$ (Bez. aus (1.2)). Zu zeigen ist
x, y, z sind kollinear bzgl. $\mathfrak{G} \iff x, y, z$ sind kollinear bzgl. $\mathfrak{G}'$.
Das folgt aber offenbar direkt aus der Definition von $\mathfrak{G}'$. ∎

Bemerkung. Wie auch für andere mathematische Strukturen bildet die Menge aller Automorphismen eines Inzidenzraumes $(P, \mathfrak{G})$ eine Gruppe. Bezeichnung: $\mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$.

(1.3) Satz. *Seien $(P, \mathfrak{G}, \in)$ und $(P', \mathfrak{G}', \in)$ Inzidenzräume und $\sigma : P \to P'$ eine Bijektion. Dann sind äquivalent:*

(I) *σ ist eine Kollineation*

(II) *$\forall G \subseteq P$ gilt:* $\quad G \in \mathfrak{G} \iff \sigma(G) := \{\sigma(x)\,;\ x \in G\} \in \mathfrak{G}'$

(III) *$\forall x, y \in P,\ x \neq y$ gilt:* $\quad \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$.

Beweis. (I) $\implies$ (II) Es gilt: $G \in \mathfrak{G} \iff \forall x, y, z \in G : \{x, y, z\}$ kollinear $\iff$ $\forall x, y, z \in G : \{\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)\}$ kollinear $\iff \sigma(G) \in \mathfrak{G}'$.

(II) $\implies$ (III) $\overline{x, y}$ und $\sigma(\overline{x, y})$ sind Geraden und $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ liegen auf letzterer, also $\sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)}$.

(III) $\implies$ (I) Seien $x, y, z \in P$ und oE $x \neq y$.

$$x, y, z \in P \text{ sind kollinear } \iff z \in \overline{x, y} \iff \sigma(z) \in \sigma(\overline{x, y}) = \overline{\sigma(x), \sigma(y)} \iff$$

$\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z) \in P'$ sind kollinear. D. h. σ ist eine Kollineation. ∎

(1.4) Beispiele. 1. (vgl. Bsp. (1.1.1)) $P = \{a, b, c, d\}$ und $(P, \{A \subseteq P\,;\ |A| = 2\})$ und $P' := \{1, 2, 3, 4\}$ und $(P', \{A \subseteq P'\,;\ |A| = 2\})$ sind offenbar isomorph (Isomorphismus?) Was ist $\mathrm{Aut}(P)$?

2. Bsp. (1.1.2) mit $|P| = n$ ergibt $\operatorname{Aut} P = S_n$.

3. Wir zeigen, dass die Inzidenzräume aus Bsp. (1.1.8) und Bsp. (1.1.10) isomorph sind. Wieder ist $\mathrm{id} : P \to P$ ein Isomorphismus. Um die Begründung transparent zu machen, zeigen wir *„wie"* die Geraden abgebildet werden: Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Dann gilt $G = \overline{a\mathbb{R}, b\mathbb{R}} = a\mathbb{R} + b\mathbb{R}$ in $(P, \mathfrak{G}, \subseteq)$. Bekanntlich existiert ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $G = x^\perp := \{u \in \mathbb{R}^3 ;\ u^\mathrm{T} x = 0\}$, z. B. $x = a \times b$ (Koordinatendarstellung des 2-dim. Untervektorraumes G in $\mathbb{R}^3$). Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x^\perp = (x\lambda)^\perp$. Man hat also
$$c\mathbb{R} \subseteq G \iff c^\mathrm{T} x = 0 \iff c\mathbb{R} I x\mathbb{R}.$$
D. h. die Gerade $G \in \mathfrak{G}$ wird auf die *Gerade* $x\mathbb{R} \in P$ abgebildet.

In einem gegebenen Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, I)$ schreiben wir für $G, H \in \mathfrak{G}$ kürzer
$$G \cap H := \{x \in P ;\ xIG \wedge xIH\}.$$
Ist $G \cap H$ einelementig, so schreiben wir statt $\{x\} = G \cap H$ auch $x := G \cap H$. Für eine Punktmenge $A \subseteq P$ setze $A \subseteq G$, falls $\forall a \in A : aIG$. Das entspricht der Aussage in Bem. (1.2).

(1.5) *Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum und $G, H \in \mathfrak{G}$, dann gilt $G = H$ oder $|G \cap H| = 1$ oder $G \cap H = \varnothing$.*

Beweis. Seien $x, y \in G \cap H$ mit $x \neq y$, dann gilt $G = \overline{x, y} = H$ wegen (I1). ∎

2 Affine Ebenen

Definition. Ein Inzidenzraum $(A, \mathfrak{G})$ heißt *affine Ebene*, wenn gilt:

(P) (*Parallelenaxiom*) $\forall G \in \mathfrak{G}, x \in A \setminus G,\ \exists_1 H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \varnothing$.

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Geraden G, H heißen *parallel*, geschrieben $G \| H$, wenn $G = H$ oder $G \cap H = \varnothing$. Für $x \in A$ und $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $\{x \| G\}$ die (wegen (P) eindeutig bestimmte) Parallele zu G durch x.

(2.1) *In jeder affinen Ebene ist $\|$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind durch die Definition bereits gegeben. Zu prüfen ist noch die Transitivität. Für $G, H, K \in \mathfrak{G}$ gelte $G \| H$ und $H \| K$. Im Fall $G \cap K = \varnothing$ ist nichts zu zeigen. Sei also $G \cap K \neq \varnothing$, etwa $x \in G \cap K \implies G = \{x \| H\} = K$. ■

Definition. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Für $G \in \mathfrak{G}$ bezeichne $[G] := \{K \in \mathfrak{G}\,;\ K \| G\}$ die Äquivalenzklasse von G in $\mathfrak{G}$ bzgl. $\|$. Mit $\mathfrak{G}/\| := \{[G]\,;\ G \in \mathfrak{G}\}$ werde wie üblich die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet.

(2.2) Beispiele. (1) Der Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ aus (1.1.1) ist die kleinstmögliche affine Ebene (genannt *Minimalmodell*), d.h. es gibt keine affine Ebene $(A, \mathfrak{G}')$ mit $|A| < |P|$.

(2) Der Inzidenzraum aus (1.1.3) ist ebenfalls eine affine Ebene. Es gibt vier Klassen paralleler Geraden (also $|\mathfrak{G}/\|| = 4$).

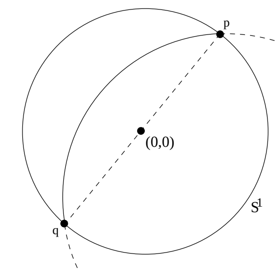
(3) Für einen Körper K sei $\mathfrak{G} := \{a + bK\,;\ a \in K^2, b \in K^2 \setminus \{0\}\}$. Dann ist $\mathrm{AG}(2, K) := (K^2, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, genannt *affine Ableitung* von K^2, manchmal auch *affine (Koordinaten-)Ebene* über K.

Beweis. (I1), (I2) aus (1.1.6).

(E3) ist klar (z.B. $(0,0), (0,1), (1,0)$ sind nicht kollinear).

(P) Sei $x \in K^2$ und $G = a + bK \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin G$. Dann folgt $x + bK \cap a + bK = \varnothing$. Um die Eindeutigkeit zu zeigen ist $x + cK \cap a + bK \neq \varnothing$ für $cK \neq bK$ (also b, c linear unabhängig) nachzuweisen. Gesucht sind also Lösungen (λ, μ) für $x + c\lambda = a + b\mu$ (bzw. äquivalent: $c\lambda - b\mu = a - x$). Da (b, c) eine Basis des K^2 ist, existieren die λ, μ eindeutig. Somit gilt $|x + cK \cap a + bK| = 1 \neq 0$. ■

(4) Sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2\,;\ \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{S}^1 := \{x \in \mathbb{R}^2\,;\ \|x\| = 1\}$ ihr Rand. Sei weiter $\mathcal{K}$ die Menge aller Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, die $\mathbb{S}^1$ symmetrisch zum Ursprung schneiden, d.h. es gibt zwei Schnittpunkte p, q und es gilt $q = -p$. Sei $\mathfrak{G} := \{K \cap D\,;\ K \in \mathcal{K}\}$, dann ist $(D, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene.

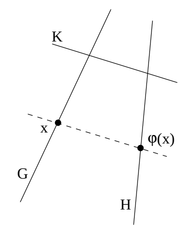


(2.3) *Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \cap H = x \in A$, dann gilt*

$$\forall G' \in [G], H' \in [H]: \ |G' \cap H'| = 1.$$

Beweis. Angenommen $|G' \cap H'| \neq 1$, also $G' = H'$ oder $G' \cap H' = \varnothing$, d.h. $G' \| H'$. Wegen $G \| G', H \| H'$ folgt mit (2.1) $G \| H$, im Widerspruch zu $G \cap H = x$. ∎

(2.4) *Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, H, K \in \mathfrak{G}$ mit $G, H \nparallel K$. Dann gelten:*



(1) $\varphi : G \to H;\ x \mapsto \{x \| K\} \cap H$ *ist eine Bijektion, genannt* Parallelperspektivität *(mit* Richtung K*).*

(2) $|G| = |H| = |[G]|$

Beweis. (1) φ ist wohldefiniert wegen (2.3) ($\implies |\{x \| K\} \cap H| = 1$).

Injektivität: Zu $x, y \in G$ sei

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(y) \quad &\implies \quad \{x \| K\} = \{\varphi(x) \| K\} = \{\varphi(y) \| K\} = \{y \| K\} \\ &\implies \quad x = \{x \| K\} \cap G = \{y \| K\} \cap G = y \qquad (\text{denn } G \nparallel K). \end{aligned}$$

Surjektivität: Sei $z \in H$ und

$$y := \{z \| K\} \cap G \implies \varphi(y) = \{y \| K\} \cap H = \{z \| K\} \cap H = z.$$

(2) $|G| = |H|$ folgt aus (1). Natürlich kann man ebenso $|K| = |G|$ zeigen.

Betrachte die Abbildung $\psi : [G] \to K;\ G' \mapsto G' \cap K$.

ψ ist wohldefiniert, denn $|G \cap K| = 1 \implies \forall G' \in [G] : |G' \cap K| = 1$ (wegen (2.3)).

ψ ist injektiv: sei $\psi(G_1) = \psi(G_2)$ für $G_1, G_2 \in [G]$. Dann gilt

$$G_1 = \{\psi(G_1) \| G\} = \{\psi(G_2) \| G\} = G_2 \implies G_1 = G_2.$$

ψ ist surjektiv: sei $p \in K$. Dann ist $G' = \{p \| G\} \in [G]$ und es gilt $\psi(G) = p$.

Also ist ψ eine Bijektion $[G] \to K$, und es gilt $|[G]| = |K| = |G| = |H|$. ∎

Definition. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, dann heißt $|G|$ für $G \in \mathfrak{G}$ die *Ordnung* von A, bezeichnet mit $\operatorname{ord} A = |G|$. Wohldefiniertheit ist durch (2.4) sichergestellt.

(2.5) Beispiele. (1) Beispiel (2.2.1) bzw. (1.1.1) hat $\operatorname{ord} = 2$.

(2) Beispiel (2.2.2) bzw. (1.1.3) hat $\operatorname{ord} = 3$.

(3) $\operatorname{ord}(\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})) = |\mathbb{R}|$, also (überabzählbar) unendlich.

(4) Im Inzidenzraum von Beispiel (1.1.5) ist für $n \geq 3$ keine Ordnung definiert.

(2.6) Satz. *Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in A$ und alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt dann*

(0) $|G| = q$

(1) $|[G]| = q$

(2) $|\{H \in \mathfrak{G}\,;\ x \in H\}| = q + 1$

(3) $|A| = q^2$

(4) $|(\mathfrak{G}/\|)| = q + 1$

(5) $|\mathfrak{G}| = q^2 + q$

Beweis. (0) nach Definition von ord. (1) nach (2.4.2).

(2) Wähle $K \in \mathfrak{G}$ mit $x \notin K$. Für alle $y \in K$ ist $\overline{x, y}$ eine Gerade durch x, dazu kommt $\{x\|K\}$, so dass es mindestens $q + 1$ Geraden durch x gibt. Da jede Gerade durch x entweder parallel zu K ist oder K trifft, sind es genau $q + 1$.

(3) $[G]$ ist eine Partition von A, d. h. $A = \bigcup_{K \in [G]} K$ und für $K, K' \in [G]$ gilt $K = K'$ oder $K \cap K' = \varnothing$. Daraus folgt

$$|A| = \sum_{K \in [G]} |K| = q \cdot q = q^2.$$

(4) Sei $x \in A$ fest. Zu $H, H' \in \{K \in \mathfrak{G}\,;\ x \in K\}$ sind

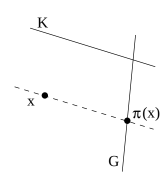
$$[H], [H'] \in \mathfrak{G}/\| \quad \text{und} \quad H \neq H' \implies [H] \neq [H'].$$

Somit gibt es mindestens $q+1$ Parallelklassen. In jeder Parallelklasse gibt es ein Element, das durch x läuft, also sind es genau $q + 1$.

(5) $|\mathfrak{G}| = |\mathfrak{G}/\|| \cdot |[G]| = (q + 1) \cdot q = q^2 + q$. ∎

Seien $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene und $G, K \in \mathfrak{G}$ mit $G \nparallel K$. Die (offensichtlich wohldefinierte und surjektive) Abbildung

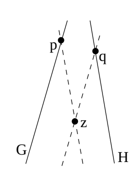
$$\pi : A \to G;\ x \mapsto \{x\|K\} \cap G$$



heißt *Parallelprojektion* (mit *Richtung* K).

Seien $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$ und $z \in A \setminus (G \cup H)$. Für $G \nparallel H$ sei $q := \{z\|G\} \cap H$ und $p := \{z\|H\} \cap G$. Die bijektive Abbildung

$$\xi : G \setminus \{p\} \to H \setminus \{q\};\ x \mapsto \overline{x, z} \cap H$$



heißt *zentrale Perspektivität*. Für $G \| H$ ist

$$\xi : G \to H;\ x \mapsto \overline{x,z} \cap H$$

wohldefiniert und bijektiv (und heißt ebenfalls *zentrale Perspektivität*).

Bemerkung. Die Herausnahme der Punkte p, q stellt sicher, dass ξ im Fall $G \nparallel H$ wohldefiniert, d. h. jeder Punkt aus $G \setminus \{p\}$ hat ein Bild, und surjektiv ist, d. h. jeder Punkt aus $H \setminus \{q\}$ hat ein Urbild.

Durch die Hinzunahme von neuen Punkten und einer neuen Geraden zur affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ kann bei der zentralen Perspektivität auf die lästigen Ausnahmepunkte und die Fallunterscheidung verzichtet werden.

Definition. Der *projektive Abschluss* $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist folgendermaßen definiert: ergänze jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ um einen Punkt $[G]$, genannt *Fernpunkt* von G, also $G' := G \cup \{[G]\}$. (Beachte, dass parallele Geraden denselben Fernpunkt bekommen!) Weiter sei $F := \mathfrak{G}/\| = \{[G]\,;\ G \in \mathfrak{G}\}$ eine zusätzliche Gerade, genannt *Ferngerade*. Dann sei

$$(P, \mathfrak{G}') := (A \cup F,\ \{G \cup \{[G]\}\,;\ G \in \mathfrak{G}\} \cup \{F\})\,.$$

Bemerkung. (1) Im Beispiel (1.1.1) ergibt sich das Beispiel (1.1.4).

(2) Im Beispiel (2.2.4) kann man sich die Fernpunkte als Punkte auf $\mathbb{S}^1$ vorstellen.

(2.7) *Der projektive Abschluss $(P, \mathfrak{G}')$ einer affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist ein Inzidenzraum mit den Eigenschaften:*

(1) $\forall G' \in \mathfrak{G}'$ *gilt* $|G'| \geq 3$.

(2) $\forall G', H' \in \mathfrak{G}', G' \neq H'$, *gilt* $|G' \cap H'| = 1$.

Beweis. (I1) Seien $x, y \in P, x \neq y$.

1. Fall: $x, y \in A \implies \overline{x,y} \cup \{[\overline{x,y}]\}$ ist eine Verbindungsgerade, da aber $x, y \notin F$ ist es auch die einzige.

2. Fall: $x \in A, y \notin A \implies y = [G]$ für $G \in \mathfrak{G}$ und wegen (P) ist $\{x\|G\} \cup \{[G]\}$ *die* Verbindungsgerade.

3. Fall: $x, y \notin A \implies x, y \in F$ und F ist die Verbindungsgerade von x, y in P.

(I2) und (1) sind klar, denn (2.6.0) zeigt $\forall G \in \mathfrak{G} : |G \cup \{[G]\}| \geq 3$ und aus (2.6.4) folgt $|F| \geq 3$.

(2) 1. Fall: $G' \neq F \neq H'$. Seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G' = G \cup \{[G]\},\ H' = H \cup \{[H]\}$. Dann folgt entweder $G \| H$ und $G' \cap H' = [G]$ $(= [H])$ oder $G \nparallel H$ und $|G \cap H| = 1$ (beachte $[G] \neq [H]$).

2. Fall: oE. $H' = F$. Dann folgt $G' \cap H' = G' \cap F = [G]$. ∎

3 Projektive Ebenen

Wir wollen nun die Eigenschaften des projektiven Abschlusses einer affinen Ebene axiomatisch erfassen.

Definition. Ein Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ heißt *projektive Ebene*, wenn gilt:

(I3) $\forall G \in \mathfrak{G}$ gilt $|G| \geq 3$

(I4) $\forall G, H \in \mathfrak{G}$ gilt $G \cap H \neq \varnothing$

(E3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

$(P, \mathfrak{G})$ heißt *verallgemeinerte projektive Ebene*, wenn (nur) (I4) und (E3) erfüllt sind.

Bemerkung. Aus (I1) und (I4) ergibt sich sofort $G \neq H \implies |G \cap H| = 1$ (vgl. (1.5)).

(3.1) Beispiele. 1. Wegen (2.7) ist der projektive Abschluss jeder affinen Ebene eine projektive Ebene.

2. Minimalmodell: (1.1.4) ist der projektive Abschluss von (1.1.1), die Ferngerade F ist gestrichelt dargestellt. Es gibt keine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit $|P| < 7$.

3. Jeder near-pencil ist eine verallgemeinerte projektive Ebene, aber keine projektive Ebene.

4. $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ (vgl. (1.1.8)) ist eine projektive Ebene.

5. Allgemeiner: sei K ein beliebiger Körper, $P = \{aK\,;\ a \in K^3 \setminus \{0\}\}$ und $\mathfrak{G} = \{aK + bK\,;\ a, b \in K^3$ linear unabhängig$\}$. Dann ist $\mathrm{PG}(2, K) := (P, \mathfrak{G}, \subseteq)$ eine projektive Ebene. (Aufgabe 3 zeigt (I1), (I2) und (I4). Warum gelten (I3) und (E3)?)

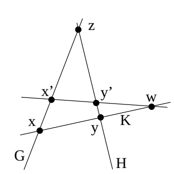
(3.2) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine verallgemeinerte projektive Ebene. Dann gilt:*

(1) *Falls $\exists G, H \in \mathfrak{G}, G \neq H,\ |G|, |H| \geq 3$, dann ist $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene.*

(2) *$(P, \mathfrak{G})$ ist projektive Ebene oder near-pencil.*

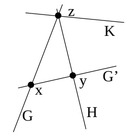
Beweis. (1) Sei $K \in \mathfrak{G}$ mit $K \neq G, H$, dann ist $|K| \geq 3$ zu zeigen. Sei $z = G \cap H$.
1. Fall: $z \notin K$. Seien $x = K \cap G$ und $y = K \cap H$.

$$|G|, |H| \geq 3 \implies \exists x' \in G \setminus \{x, z\}, \exists y' \in H \setminus \{y, z\}$$



Wegen (I4) existiert $w = \overline{x', y'} \cap K$ (und $w \neq x, y$ wegen $G, H \neq K$), also gilt $|K| \geq 3$.

2. Fall: $z \in K$. Zu $x \in G \setminus \{z\}, y \in H \setminus \{z\}$ sei $G' := \overline{x,y}$. Dann gilt $|G'| \geq 3$ wegen Fall 1 und G', H, K liegen wie in Fall 1. Also $|K| \geq 3$.



(2) folgt direkt aus (1). ■

Der Prozess des projektiven Abschliessens kann umgekehrt werden:

(3.3) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Setze $P_F := P \setminus F$ und $\mathfrak{G}_F := \{G \setminus F\,;\ G \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}\}$. Dann gilt:*

(1) *$(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist eine affine Ebene.*

(2) *Für $G, H \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}$ gilt $(G \setminus F) \| (H \setminus F) \iff G \cap F = H \cap F$.*

(3) *Der projektive Abschluss von $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ ist auf natürliche Weise isomorph zu $(P, \mathfrak{G})$.*

Beweis. (1) (I1) Sei $x, y \in P_F, x \neq y$. $\exists_1 G \in \mathfrak{G}$ mit $x, y \in G, G \neq F$, und $x, y \in G \setminus F$.

(I2) folgt aus (I3), da $G \setminus F = G \setminus (G \cap F)$.

(E3) Seien $a, b, c \in P$ nicht kollinear und o.B.d.A. $a \notin F$. Wegen (I3) $\exists b' \in \overline{a,b} \setminus F, b' \neq a$, und $c' \in \overline{a,c} \setminus F, c' \neq a$, und $a, b', c' \in P_F$ sind nicht kollinear.

(P) Sei $G \in \mathfrak{G} \setminus \{F\}$ und $x \in P_F$, $x \notin G$. Mit $z = G \cap F$ erfüllt $H := \overline{x,z} \setminus F$ die Bedingungen $x \in H \in \mathfrak{G}_F$ und $H \cap (G \setminus F) = \varnothing$. Das zeigt die Existenz.

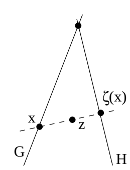
Für $K \in \mathfrak{G}$ mit $x \in K$ und $K \neq \overline{x,z}$ gilt $K \cap G \notin F$ also $K \setminus F \cap G \setminus F \neq \varnothing$. Daher ist H die einzige Parallele zu $G \setminus F$ durch x.

(2) ist im Beweis von (P) enthalten.

(3) Übung. ■

(3.4) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene, $G, H \in \mathfrak{G}$, $G \neq H$, und $z \in P \setminus (G \cup H)$. Dann gilt:*

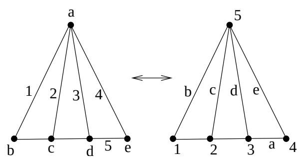
(1) *$\zeta : G \to H;\ x \mapsto \overline{x,z} \cap H$ ist eine Bijektion, genannt* zentrale Perspektivität.



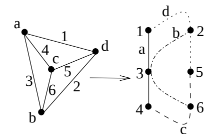
(2) $|G| = |H|$.

Beweis. Übung. ■

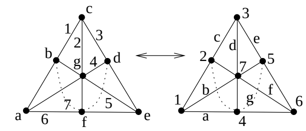
Für $G \in \mathfrak{G}$ heißt $|G| - 1$ die *Ordnung* der projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$ (Bezeichnung $\operatorname{ord} P$). Wegen (3.4.2) ist das eine sinnvolle Definition.



Beispiel 1



Beispiel 2



Beispiel 3

(3.5) Bemerkung. (1) Jede affine Ebene hat die gleiche Ordnung wie ihr projektiver Abschluss. (Deshalb wird $|G|-1$ als Ordnung der projektiven Ebene bezeichnet.)

(2) Jede projektive Ebene hat die gleiche Ordnung wie jede in ihr enthaltene affine Ebene (vergleiche (3.3.1)).

(3) Diese sind aber i. A. nicht isomorph (im Unterschied zu (3.3.3)), da die Wahl der Geraden F willkürlich ist. Beispiele dazu werden wir evt. später in den Übungen behandeln.

(3.6) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$:*

(1) $|G| = q+1$

(2) $|\overline{x}| = |\{H \in \mathfrak{G}\,;\ x \in H\}| = q+1$

(3) $|P| = q^2+q+1$

(4) $|\mathfrak{G}| = q^2+q+1\,.$

Beweis. Alle Punkte ergeben sich aus (2.6), (3.3) und der Konstruktion des projektiven Abschlusses. ∎

Dualität

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Das Tripel $(\mathfrak{G}, P, I')$ mit $GI'x :\Longleftrightarrow xIG$ heißt *duale Inzidenzstruktur* zu $(P, \mathfrak{G}, I)$.

(3.7) Beispiele. (1) Die duale Inzidenzstruktur eines near-pencils ist wieder ein near-pencil.

(2) Die duale Inzidenzstruktur von (1.1.1) ist kein Inzidenzraum (z.B. $\nexists\overline{3,5}$).

(3) Die duale Inzidenzstruktur von (3.1.2) ist wieder eine projektive Ebene.

Falls $(\mathfrak{G}, P, I')$ ebenfalls ein Inzidenzraum ist (was i. A. nicht der Fall ist, da die Existenz von „Verbindungsgeraden“ nicht gesichert ist), bietet es sich an, um bei $I = \in$ auch $I' = \in$ wählen zu können, die duale Inzidenzstruktur geeignet zu schreiben:

Setze $\tilde{P} = \mathfrak{G}$, $\forall x \in P : \ \overline{x} := \{G \in \mathfrak{G}\,;\ x \in G\}$ und $\tilde{\mathfrak{G}} := \left\{\overline{x};\ x \in P\right\}$. Dann ist $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$ der zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$ duale Inzidenzraum.

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen P und $\tilde{P}$:

Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G}, \in)$	dualer Inzidenzraum $(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}}, \in)$
Punkt x	Gerade $\overline{x}$
Gerade G	Punkt G
Verbindungsgerade $\overline{x, y}$	Schnittpunkt $\overline{x} \cap \overline{y} = \overline{x, y}$
Schnittpunkt $G \cap H$	Verbindungsgerade $\overline{G \cap H}$

Insbesondere sind die Begriffe „kollinear“ und „kopunktal“ zueinander dual.

(3.8) Bemerkung. 1. Wegen (1.5) gibt es in der dualen Inzidenzstruktur eines Inzidenzraumes höchstens eine Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten — das folgt aus aus (I1).

2. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum. Gilt $|\mathfrak{G}| \neq 1$, dann ist (I2) auch in $(\mathfrak{G}, P, I')$ erfüllt.

3. Sei $(P, \mathfrak{G}, I)$ ein Inzidenzraum.

   $(\mathfrak{G}, P, I')$ ist Inzidenzraum $\iff$ $(P, \mathfrak{G}, I)$ ist verallgemeinerte projektive Ebene

   (denn (I1) $\iff$ (I4) und (I2) $\iff$ (E3)). Insbesondere gilt: $(P, \mathfrak{G}, I)$ und $(\mathfrak{G}, P, I')$ sind beide verallgemeinerte projektive Ebenen, oder beide nicht.

(3.9) *Sei $(P, \mathfrak{G}, \in)$ eine projektive Ebene, dann ist $(\mathfrak{G}, P, \ni)$ auch eine projektive Ebene, die zu $(P, \mathfrak{G}, \in)$* duale Ebene. *Sie hat dieselbe Ordnung wie $(P, \mathfrak{G})$.*

Beweis. Wegen obiger Bemerkung (3) ist nur (I3) zu zeigen. (I3) folgt direkt aus (3.6.2). Wegen (3.6) sind die Ordnungen gleich. ∎

Als direkte Folgerung ergibt sich das

(3.10) Dualitätsprinzip. *Ersetzt man in einem für alle projektiven Ebenen gültigen Satz*

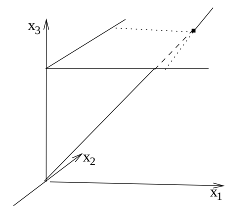
1. *Punkte durch Geraden und Geraden durch Punkte*

2. *„Verbinden“ durch „Schneiden“ und „Schneiden“ durch „Verbinden“*

so erhält man wieder einen Satz, der für alle projektiven Ebenen gilt.

Homogene Koordinaten

Für einen Körper K wird der Zusammenhang zwischen $\mathrm{AG}(2,K)$ und $(P,\mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K)$ untersucht. Sei $A := (0,0,1) + (1,0,0)K + (0,1,0)K$. Zusammen mit der üblichen Geradenstruktur ist $(A,\mathfrak{G}_A)$ eine affine Ebene. Betrachte die Abbildung $\iota : A \to P;\ x \mapsto xK$, die Punkte aus A auf Punkte aus P und entsprechend Geraden auf Geraden abbildet: Für $G = a + bK \in \mathfrak{G}_A$ gilt $\iota(G) = aK + bK \in \mathfrak{G}$, also ist $\iota(G)$ der von G erzeugte 2-dimensionale (da a, b linear unabhängig in K^3) Untervektorraum des K^3.



ι ist nicht surjektiv, denn Punkte $(a_1,a_2,0)K \in P$ liegen nicht im Bild. Die Bilder der in A parallelen Geraden $a+bK$, $c+bK$ schneiden sich in $(b_1,b_2,0)K$, dementsprechend ist $F := (1,0,0)K + (0,1,0)K \in \mathfrak{G}$ die Ferngerade in $\mathrm{PG}(2,K)$. Wir nutzen die Konvention, die Koordinaten als (x_0,x_1,x_2) zu bezeichnen, und präzisieren die obige Idee.

(3.11) Satz. *Sei K ein Körper, $(P,\mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K)$ und $(A,\mathfrak{G}_A) = \mathrm{AG}(2,K)$. Für die Abbildung $\iota : A \to P;\ (a_1,a_2) \mapsto (1,a_1,a_2)K$, genannt* kanonische Einbettung*, gilt:*

(1) *ι ist injektiv.*

(2) *$\forall a,b,c \in A$ gilt: a,b,c sind kollinear $\iff$ $\iota(a),\iota(b),\iota(c)$ sind kollinear.*

(3) *Sei $\tilde{P}$ der projektive Abschluss von A. Durch $\tilde{\iota}([bK]) := (0,b_1,b_2)K$ für alle $b \in K^2 \setminus \{0\}$ wird eine Fortsetzung $\tilde{\iota} : \tilde{P} \to P$ definiert (also $\tilde{\iota}|_A = \iota$), die ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Zu jedem Vektor $x = (x_1,x_2) \in A = K^2$ bezeichne x' den Vektor $(1,x_1,x_2) \in K^3$.

(1) Sei $a, b \in A$ mit

$$\begin{aligned} \iota(a) = \iota(b) \quad &\Longrightarrow \quad a'K = b'K \Longrightarrow a' = b'\lambda \Longrightarrow \lambda = 1 \quad (\text{wegen } a'_0 = b'_0 = 1) \\ &\Longrightarrow \quad a' = b' \Longrightarrow a = b. \end{aligned}$$

(2) „ $\Longrightarrow$ “: Seien $a,b,c \in A$ kollinear und verschieden, dann existiert $\lambda \in K$ mit

$$\begin{aligned} c &= a + (b-a)\lambda = a(1-\lambda) + b\lambda \quad \Longrightarrow \\ c' &= a'(1-\lambda) + b'\lambda \Longrightarrow c'K \subseteq a'K + b'K \Longrightarrow \iota(c) \subseteq \overline{\iota(a),\iota(b)}, \end{aligned}$$

und $\iota(a),\iota(b),\iota(c)$ sind kollinear.

„ $\Longleftarrow$ “: Seien $\iota(a),\iota(b),\iota(c)$ kollinear, dann gibt es $\mu,\lambda \in K$ mit $c' = a'\mu + b'\lambda$. Es folgt $\mu + \lambda = 1$, denn $a'_0 = b'_0 = c'_0 = 1$. Somit $c = a(1-\lambda) + b\lambda = a + (b-a)\lambda$ und a,b,c sind kollinear.

(3) $\tilde{\iota}$ ist für alle $p \in \tilde{P}$ definiert, denn $[bK]$ durchläuft alle Parallelklassen von A.

$\tilde{\iota}$ ist injektiv: Sei $\tilde{\iota}([bK]) = \tilde{\iota}([cK])$ mit $b, c \in K^2 \setminus \{0\}$, d.h. $(0, b_1, b_2)K = (0, c_1, c_2)K$. Daher gilt $bK = cK$, also $[bK] = [cK]$. Die anderen Fälle gelten wegen (1) und der Definition.

$\tilde{\iota}$ ist surjektiv: Sei $aK \in P$.

1. Fall: $a_0 = 0$. Dann gilt $\tilde{\iota}([(a_1, a_2)K]) = aK$.

2. Fall: $a_0 \neq 0$. Es gilt $\iota(a_1 a_0^{-1}, a_2 a_0^{-1}) = (1, a_1 a_0^{-1}, a_2 a_0^{-1})K = (a_0, a_1, a_2)K = aK$.

ι ist Kollineation: Seien $a, b, c \in \tilde{P}$ verschieden und bezeichne F die Ferngerade von $\tilde{P}$.

„$\Longrightarrow$“: Seien a, b, c kollinear.

1. Fall: $\overline{a, b} \neq F$ und oE. $a, b \in A$. Falls $c \in A$ folgt die Behauptung mit (2). Falls $c \in F$, d.h.

$$\begin{aligned} c &= \left[\overline{a, b}\right] = [a + (b - a)K] \stackrel{!}{=} [(b - a)K] \implies \\ \tilde{\iota}(c) &= (0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)K = (b' - a')K \subseteq a'K + b'K = \overline{\iota(a), \iota(b)} \end{aligned}$$

und $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ sind kollinear.

2. Fall: $a, b, c \in F$. Dann gilt $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)\, I\, \big((0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K\big)$, also sind $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

„$\Longleftarrow$“: Seien $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)$ kollinear.

1. Fall: $\overline{\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b)} \neq (0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K$. Dann gilt oE. $\tilde{\iota}(a) = a'K$, $\tilde{\iota}(b) = b'K$ und $\tilde{\iota}(c) = (a'\lambda + b'\mu)K$.

Falls $\lambda = -\mu$ gilt $\tilde{\iota}(c) = (0, b_1 - a_1, b_2 - a_2)K$ und $c = [(b - a)K]$ ist Fernpunkt der Geraden $\overline{a, b}$ in $\tilde{P}$, d.h. a, b, c sind kollinear.

Falls $\lambda \neq -\mu$ oE. $\lambda + \mu = 1$ (sonst beide geeignet skalieren), also

$$\tilde{\iota}(c) = (a'\lambda + b'(1 - \lambda))K = ((a' - b')\lambda + b')K \implies c = (a - b)\lambda + b$$

und a, b, c sind kollinear.

2. Fall: $\tilde{\iota}(a), \tilde{\iota}(b), \tilde{\iota}(c)\, I\, \big((0, 1, 0)K + (0, 0, 1)K\big)$. Dann sind $a, b, c \in F$ kollinear. ∎

Sei $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$. Man nennt $(a_0 : a_1 : a_2)$ *homogene Koordinaten* des Punktes $aK \in P$. Die Elemente a_0, a_1, a_2 sind nur bis auf Vielfache ($\neq 0$) aus K bestimmt, d.h. $\forall \lambda \in K \setminus \{0\} : (a_0 : a_1 : a_2) = (a_0\lambda : a_1\lambda : a_2\lambda)$. Im Fall $a_0 \neq 0$ bezeichnet $(a_0 : a_1 : a_2)$ den „affinen Punkt“ $(a_1 a_0^{-1}, a_2 a_0^{-1})$, für $a_0 = 0$ den Fernpunkt der affinen Geraden $(a_1, a_2)K$. Der affine Punkt (a_1, a_2) bekommt unter der kanonischen Einbettung die homogenen Koordinaten $(1 : a_1 : a_2)$. Man nennt (a_1, a_2) auch die *inhomogenen Koordinaten* des Punktes $(1, a_1, a_2)K$. Beachte $(a_0 : a_1 : a_2) \neq (0 : 0 : 0)$, denn $a = 0 \implies aK \notin P$.

Beispiel. $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6)$.

(3.12) *Sei* $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$ *und* $F \in \mathfrak{G}$. *Dann ist die affine Ebene* $(P_F, \mathfrak{G}_F)$ *(siehe (3.3)) isomorph zu* $\mathrm{AG}(2, K)$.

Beweis. Wähle eine Basis vom K^3, $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2} \in F$, $\mathbf{b_0} \in K^3 \backslash F$. Bezüglich dieser Basis liegt die Situation aus (3.11) vor. Es bleibt zu zeigen, dass Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern, genauer: $K^3 \to K^3$; $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ induziert einen Automorphismus von $\mathrm{PG}(2, K)$ für alle $M \in \mathrm{GL}(3, K)$. Das werden wir in Kapitel 6 sehen. ∎

(3.13) Bemerkung. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim V = 3$. Dann erhält man eine projektive Ebene durch

$$P := \{aK\, ;\ a \in V \setminus \{0\}\}\,, \quad \mathfrak{G} := \{aK + bK\, ;\ a, b \in V \text{ linear unabhängig}\}\,, \quad I := \subseteq .$$

Natürlich ist $(P, \mathfrak{G})$ isomorph zu $\mathrm{PG}(2, K)$. Durch Wahl einer Basis werden homogene Koordinaten festgelegt.

Zur Existenz endlicher affiner bzw. projektiver Ebenen

Nach (2.2.3) gibt es zu jedem Körper eine affine Ebene $\mathrm{AG}(2, K)$ und nach (3.11) eine zugehörige projektive Ebene $\mathrm{PG}(2, K)$, beide mit Ordnung $|K|$. Für jede Primzahl p ist $\mathrm{GF}(p) := (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich $\mathbb{Z}_p$ zu einem Körper $\mathrm{GF}(p^n)$ mit p^n Elementen erweitern. Dieser ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (Beweis in der Algebra).

(3.14) Beispiel (Skizze). Das Polynom $x^2 + x + 1$ hat keine Nullstelle in $K = \mathbb{Z}_2$. Bezeichne τ eine Nullstelle von x^2+x+1 (also $\tau^2 = \tau+1$). Die Menge $\mathrm{GF}(4) := \mathbb{Z}_2+\mathbb{Z}_2\tau$ bildet einen Körper mit den 4 Elementen $0, 1, \tau, \tau + 1$ und folgender Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned}(a + b\tau) + (c + d\tau) &:= (a + c) + (b + d)\tau\\ (a + b\tau)(c + d\tau) &:= (ac + bd) + (ad + bc + bd)\tau.\end{aligned}$$

Für die Inversen gilt

$$\tau^{-1} = \tau + 1 \quad \text{und} \quad (\tau + 1)^{-1} = \tau.$$

Für $K = \mathbb{R}$ erzeugt das Polynom $x^2 + 1$ auf diese Weise den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (mit der Nullstelle i).

(3.15) Bemerkung. 1. Die Multiplikation ergibt sich durch distributives Ausmultiplizieren der Summen, und Anwenden der Tatsache, dass τ Nullstelle des gegebenen Polynoms ist.

2. Um endliche Körper mit p^2 bzw. p^3 Elementen zu konstruieren, kann man entsprechend vorgehen: Finde ein Polynom vom Grad 2 bzw. 3 ohne Nullstellen in $\mathbb{Z}_p$, betrachte $\mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p\tau$ bzw. $\mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p\tau + \mathbb{Z}_p\tau^2$ usw.

   Für $p^n, n \geq 4$, muss das Polynom „irreduzibel“ sein.

3. Ist $K = \mathrm{GF}(q)$ für eine Primzahlpotenz $q = p^n$, so schreiben wir statt $\mathrm{AG}(2, K) = \mathrm{AG}(2, \mathrm{GF}(q))$ auch kürzer $\mathrm{AG}(2, q)$. Entsprechend schreiben wir $\mathrm{PG}(2, q)$ statt $\mathrm{PG}(2, \mathrm{GF}(q))$.

(3.16) Folgerung. *Für jede Primzahl p und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es affine und projektive Ebenen der Ordnung p^n, etwa $\mathrm{AG}(2, p^n)$ bzw. $\mathrm{PG}(2, p^n)$.*

(3.17) Satz (Bruck-Ryser). *Gibt es für $q \in \mathbb{N}$ mit $q \equiv 1 \mod 4$ oder $q \equiv 2 \mod 4$ eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ mit $\operatorname{ord} P = q$, so ist q die Summe zweier Quadrate, d.h. $\exists a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $q = a^2 + b^2$.*

Beweis. Siehe etwa in Hughes/Piper [2]. ■

(3.18) Satz. *Es gibt keine projektive Ebene der Ordnung $q \equiv 6 \mod 8$.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{N}$ geschrieben als $a = 4m + r$ mit $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann ist

$$a^2 = 16m^2 + 8mr + r^2 = 8m' + s \text{ mit } m' \in \mathbb{N} \text{ und } s \in \{0, 1, 4\}.$$

Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt also $a^2 + b^2 = 8m'' + t$ mit $m'' \in \mathbb{N}$ und $t \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$. Sei nun $q \equiv 6 \mod 8$, dann folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : q \neq a^2 + b^2$. Es gilt aber auch $q \equiv 2 \mod 4$ und mit (3.17) folgt dann, dass es keine projektive Ebene der Ordnung q geben kann. ■

Aus (3.16) und (3.17) folgt auch (steckt aber im Beweis von (3.17))

(3.19) Satz. *Jede Primzahl $p \equiv 1 \mod 4$ ist die Summe zweier Quadrate.* ■

(3.20) Bemerkung. 1. Fermat[1]: Für jede Primzahl $p \neq 2$ gilt:
p ist Summe zweier Quadrate (sogar eindeutig) $\iff p \equiv 1 \mod 4$.
Insbesondere sind Primzahlen $p \equiv 3 \mod 4$ nicht Summe zweier Quadrate.

2. Der Satz von Bruck-Ryser benötigt den sog. Vierquadratesatz von Lagrange[2], der besagt, dass jede natürliche Zahl Summe vierer Quadratzahlen ist.

3. Alle bekannten projektiven Ebenen haben als Ordnung eine Primzahlpotenz.

[1] Pierre de Fermat 1601–1665
[2] Joseph Louis Lagrange 1736–1813

4. Neben dem Satz von Bruck-Ryser gibt es ein einziges Nichtexistenzergebnis:

   Mit Hilfe eines Computers wurde gezeigt, dass es keine projektive Ebene der Ordnung 10 gibt.

5. Für Primzahlpotenzen q gibt es auch Beispiele von projektiven Ebenen, die nicht die Form $\mathrm{PG}(2, q)$ haben und zum Beispiel mit Fastkörpern dargestellt werden. Der kleinste echte Fastkörper hat 9 Elemente. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

Für einige Ordnungen ist die Existenzfrage einer projektiven Ebene also geklärt:

Ordnung	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Existenz	ex.	ex.	ex.	ex.	ex. n.	ex.	ex.	ex.	ex. n.	ex.	**?**	ex.	ex. n.	**?**
Beweis	p^n	p^n	p^n	p^n	(3.17)	p^n	p^n	p^n	Computer	p^n	-	p^n	(3.17)	-

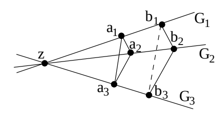
4 Schließungssätze und Koordinatisierung

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, affine Ebenen, die zu einem $\mathrm{AG}(2,K)$ isomorph sind, zu kennzeichnen. Obwohl Zusatzeigenschaften, die dies leisten, den Charakter von Axiomen haben spricht man meist von „Schließungssätzen“. (Es sind ja Sätze, die in $\mathrm{AG}(2,K)$ gelten.) Entsprechende Aussagen erhält man dann natürlich auch für projektive Ebenen.

Schließungssätze in affinen Ebenen

Definition. Die affine Ebene $(A,\mathfrak{G})$ heißt *desarguessch*, wenn das folgende *Axiom von Desargues*[3] erfüllt ist:

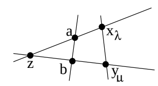
(AD) Für $i \in \{1,2,3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ verschieden aber kopunktal mit $z \in G_i$. Für verschiedene $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ gelte dann:



$$\overline{a_1,a_2} \parallel \overline{b_1,b_2} \wedge \overline{a_2,a_3} \parallel \overline{b_2,b_3} \Rightarrow \overline{a_1,a_3} \parallel \overline{b_1,b_3}.$$

Wir benötigen ein vorbereitendes Lemma.

(4.1) *Wir betrachten* $\mathrm{AG}(2,K)$ *über dem Körper* K*. Seien* $a,b,z \in K^2$ *nicht kollinear und für* $\lambda,\mu \in K\setminus\{0\}$ *seien* $x_\lambda = z+(a-z)\lambda,\ y_\mu = z+(b-z)\mu$*. Dann gilt:*



$$\overline{a,b} \parallel \overline{x_\lambda, y_\mu} \iff \lambda = \mu.$$

Beweis. $\overline{a,b} \parallel \overline{x_\lambda,y_\mu} \iff (b-a)K = (y_\mu - x_\lambda)K \iff \exists \delta \in K\setminus\{0\} : y_\mu - x_\lambda = (b-a)\delta$.

„ $\Longleftarrow$ “: Sei $\lambda=\mu$, dann gilt $y_\mu - x_\lambda = (b-a)\lambda$, also $\delta=\lambda$.

„ $\Longrightarrow$ “: Ist $\lambda \neq \mu \implies y_\mu \neq y_\lambda$ (mit $y_\lambda = z+(b-z)\lambda$). Da aber $\overline{x_\lambda,y_\lambda} = \{x_\lambda \parallel \overline{a,b}\} \neq \overline{x_\lambda,y_\mu}$ (wegen z, x_λ, y_μ nicht kollinear) gilt, folgt $\overline{a,b} \nparallel \overline{x_\lambda,y_\mu}$. ■

(4.2) Satz. *Die affine Koordinatenebene* $(A,\mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2,K)$ *über einem Körper* K *ist desargessch.*

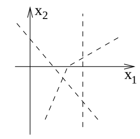
Beweis. In der Situation (AD) gilt $b_i = z+(a_i-z)\lambda_i$ mit $\lambda_i \in K^*$. Wegen (4.1) hat man $\overline{a_1,a_2} \parallel \overline{b_1,b_2} \implies \lambda_1=\lambda_2$ und $\overline{a_2,a_3} \parallel \overline{b_2,b_3} \implies \lambda_2 = \lambda_3$. Es folgt natürlich $\lambda_1=\lambda_3$ und weiter (mit (4.1)) $\overline{a_1,a_3} \parallel \overline{b_1,b_3}$. ■

(4.3) Beispiel. Die *Moulton-Ebene* (vgl. Übungsaufgabe 3) hat die Punktmenge $\mathbb{R}^2$ und die folgende Geradenmenge $\mathfrak{G}$: Zu $m,c \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{aligned} \langle c\rangle &= \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ x_1 = c\big\} \quad \text{und} \\ \langle\!\langle m,c\rangle\!\rangle &= \begin{cases} \langle m,c\rangle = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ x_2 = mx_1+c\} & \text{für } m\le 0 \\ \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\,;\ (0\ge x_2 = mx_1+c)\vee(0<x_2=\tfrac{1}{2}(mx_1+c))\big\} & \text{für } m>0 \end{cases} \end{aligned}$$

[3] Girard Desargues 1591-1661

Weiter sei $\mathfrak{G} = \{\langle\!\langle m,c\rangle\!\rangle\,;\ m,c \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle c\rangle\,;\ c \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $(M,\mathfrak{G})$ eine nicht desargessche affine Ebene.



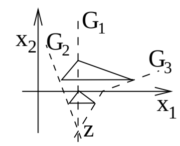
Beweis (Skizze). $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{G})$ ist affine Ebene: (I1): Betrachte die Punkte $a \neq b \in \mathbb{R}^2$ (oE. mit $a_1 \leq b_1$). Nur der Fall $(a_1 < b_1) \wedge (a_2 \leq 0 < b_2)$ weicht vom Üblichen ab. Gesucht ist $G = \langle\!\langle m,c\rangle\!\rangle$, so dass $a,b \in G$. Also

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = ma_1 + c \\ 2b_2 = mb_1 + c \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} m = \frac{2b_2 - a_2}{b_1 - a_1} > 0 \\ c = a_2 - ma_1 \end{array}\right.$$

und G ist somit eindeutig bestimmt.

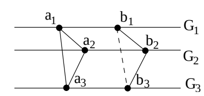
(I2) und (E3) sind klar.

(P): Man kann zeigen: $\langle\!\langle m,c\rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle m',c'\rangle\!\rangle = \varnothing \iff m = m'$. Offensichtlich ist in der nebenstehenden Figur (AD) nicht erfüllt. ■



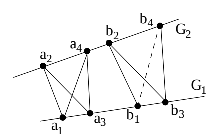
(4.4) *Sei $(A,\mathfrak{G})$ eine desargessche affine Ebene. Dann gilt:*

(1) (Ad) *(„*kleiner Desargues*“) Für $i \in \{1,2,3\}$ seien $G_i \in \mathfrak{G}$ parallel und verschieden. Weiter gelte $a_i, b_i \in G_i$. Dann $\overline{a_1,a_2} \| \overline{b_1,b_2} \wedge \overline{a_2,a_3} \| \overline{b_2,b_3} \implies \overline{a_1,a_3} \| \overline{b_1,b_3}$.*



(2) (AD') *(„*Umkehrung des Desargues*“) Seien $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in A$ verschieden, so dass weder a_1,a_2,a_3 noch b_1,b_2,b_3 kollinear sind und für $i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j$, gelte $\overline{a_i,a_j} \| \overline{b_i,b_j}$. Dann ist $\left\{\overline{a_i,b_i}\,;\ i \in \{1,2,3\}\right\}$ eine Menge von parallelen oder kopunktalen Geraden.*

(3) *(*Scherensatz*) Seien $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ und $a_1,a_3,b_1,b_3 \in G_1 \setminus G_2$ und $a_2,a_4,b_2,b_4 \in G_2 \setminus G_1$. Dann gilt:*



$$\forall i \in \{1,2,3\} : \overline{a_i,a_{i+1}} \| \overline{b_i,b_{i+1}} \implies \overline{a_1,a_4} \| \overline{b_1,b_4}.$$

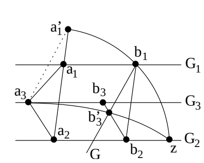
Beweis. (1) Die Voraussetzung implizieren:

$$\exists i \in \{1,2,3\} : a_i = b_i \implies \forall i \in \{1,2,3\} : a_i = b_i.$$

Daher können wir $\forall i \in \{1,2,3\} : a_i \neq b_i$ annehmen. OE. seien weder a_1,a_2,a_3 noch b_1,b_2,b_3 kollinear (ansonsten ist die Aussage trivial).

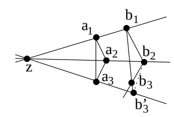
Sei nun $G = \{b_1 \| \overline{a_1,a_3}\}$, dann existiert $b_3' := G \cap \overline{b_2,b_3}$ (weil $\overline{a_1,a_3} \nparallel \overline{b_2,b_3}$). Angenommen $b_3 \neq b_3'$, dann existiert $z := \overline{a_3,b_3'} \cap G_2$ und $a_1' := \overline{a_1,a_2} \cap \overline{z,b_1}$ (weil $\overline{a_1,a_2} \| \overline{b_1,b_2}$). Es gilt $\overline{a_1',a_2} \| \overline{b_1,b_2}$, $\overline{a_2,a_3} \| \overline{b_2,b_3'}$, also folgt mit (AD):

$$\overline{a_1',a_3} \| \overline{b_1,b_3'} \| \overline{a_1,a_3} \implies \overline{a_1',a_3} = \overline{a_1,a_3} \implies a_1' = a_1$$

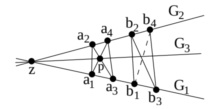


(denn $a_1 = \overline{a_1,a_2} \cap \overline{a_1,a_3} = \overline{a_1,a_2} \cap \overline{a_1',a_3} = a_1'$), daher $z \in \overline{a_1,b_1} = G_1$. Wegen $z \in G_2$ widerspricht das der Annahme $G_1 \parallel G_2$ und $G_1 \neq G_2$.

(2) Falls für ein Paar i, j mit $i \neq j$ gilt $\overline{a_i, b_i} = \overline{a_j, b_j}$, so ist nichts zu zeigen. Im anderen Fall seien für $i \in \{1, 2, 3\}$ wenigstens zwei $\overline{a_i, b_i}$ nicht parallel (sonst ist ebenfalls nichts zu zeigen), also oE. $z = \overline{a_1, b_1} \cap \overline{a_2, b_2}$. Es gilt $z \neq a_3, b_3$ (denn sonst $\overline{a_1, a_3} = \overline{b_1, b_3}$ — Widerspruch). Sei $b_3' = \overline{z, a_3} \cap \overline{b_1, b_3}$ (existiert, da ansonsten $z \in \overline{a_1, a_3} \implies \overline{b_1, b_3} = \overline{a_1, a_3}$ — Widerspruch). Die Punkte $a_2, a_1, a_3, b_2, b_1, b_3'$ erfüllen die Voraussetzungen von (AD), also gilt $\overline{b_2, b_3'} \parallel \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \implies \overline{b_2, b_3'} = \overline{b_2, b_3}$ und $b_3' = \overline{b_1, b_3} \cap \overline{b_2, b_3} = b_3$, insbesondere gilt $z \in \overline{a_3, b_3}$.



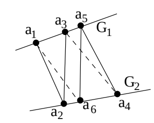
(3) Im Fall $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{a_1, a_4} \wedge \overline{b_2, b_3} \parallel \overline{b_1, b_4}$ folgt $\overline{a_1, a_4} \parallel \overline{b_1, b_4}$ direkt, also kann oE. $\overline{a_2, a_3} \nparallel \overline{a_1, a_4}$ angenommen werden. Sei also $p = \overline{a_2, a_3} \cap \overline{a_1, a_4}$. Wähle G_3 durch p, so dass (AD) oder (Ad) entsteht. In den Übungen wird der Beweis weitergeführt.



$\blacksquare$

Definition. Die affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ heißt *pappussch*, wenn das folgende *Axiom von Pappos*[4] erfüllt ist:

(AP) Seien G_1, G_2 verschiedene Geraden und $a_1 \dots a_6$ verschieden mit $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \backslash G_2$ und $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \backslash G_1$. Dann $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{a_4, a_5} \wedge \overline{a_2, a_3} \parallel \overline{a_5, a_6} \implies \overline{a_1, a_6} \parallel \overline{a_3, a_4}$.



(4.5) Satz (Hessenberg 1905). [5] *Jede pappussche affine Ebene $(A, \mathfrak{G})$ ist desarguessch.*

Beweis. Seien $G_1, G_2, G_3 \in \mathfrak{G}$ verschieden und kopunktal mit $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien $a_i, b_i \in G_i$ wie in (AD) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}$. OE. seien a_1, a_2, a_3 nicht kollinear, sonst wären nämlich b_1, b_2, b_3 ebenfalls kollinear und es wäre nichts zu zeigen. Sind beide $\overline{a_1, a_3}, \overline{b_1, b_3} \parallel G_2$, so folgt die Behauptung, also sei oE. $\overline{b_1, b_3} \nparallel G_2$. Dann existieren die Punkte

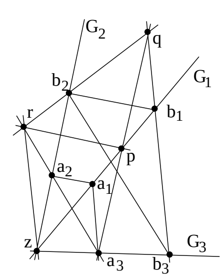
$$p = \{a_3 \| G_2\} \cap G_1 \qquad q = \{a_3 \| G_2\} \cap \overline{b_1, b_3} \notin \overline{b_2, b_3} \qquad r = \overline{q, b_2} \cap \overline{a_2, a_3}$$

(denn $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3} \nparallel \overline{q, b_2}$). Dabei gilt $p, q \neq a_3$ (sonst $G_1 = G_3$), $r \neq a_3$ (sonst $q = a_3$) und $r \neq p$ (sonst $p = r = a_3$). Jetzt wird dreimal (AP) angewandt:

1.) Für r, a_3, q, b_3, b_2, z auf den Geraden $\overline{r, q}$ und G_3:
$\overline{r, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3}, \overline{z, b_2} \parallel \overline{a_3, q} \implies \overline{r, z} \parallel \overline{q, b_3} = \overline{b_1, b_3}$.

2.) Für r, z, b_2, b_1, q, p auf den Geraden $\overline{r, b_2}$ und G_1:
$\overline{r, z} \parallel \overline{b_1, q}, \overline{z, b_2} \parallel \overline{p, q} \implies \overline{r, p} \parallel \overline{b_1, b_2} \parallel \overline{a_1, a_2}$.

3.) Für r, p, a_3, a_1, a_2, z auf $\overline{a_2, a_3}$ und G_1:
$\overline{r, p} \parallel \overline{a_1, a_2}, \overline{p, a_3} \parallel \overline{a_2, z} \implies \overline{r, z} \parallel \overline{a_1, a_3}$.



[4]Pappos/Pappus von Alexandria (um 320 n. Chr.)
[5]G. Hessenberg 1874–1929

Insgesamt folgt damit $\overline{a_1, a_3} \| \overline{r, z} \| \overline{b_1, b_3}$. ■

(4.6) Bemerkung. 1. Tatsächlich sind (AD), (AD') und der Scherensatz äquivalent.

2. Die projektiven Fassungen von (AD) und (AD') sind zueinander dual.

3. Es gilt die Implikationskette (AP) „$\Longrightarrow$" (AD) „$\Longrightarrow$" (Ad) $\overset{\text{Übung}}{\Longrightarrow}$ (Ap) (Spezialfall von (AP) mit $G_1 \| G_2$). Ob (Ap) „$\Longrightarrow$" (Ad) gilt, ist offen. Die übrigen Implikationen sind nicht umkehrbar. Das ist durch Gegenbeispiele belegt.

4. Die Moulton-Ebene erfüllt nicht (Ap), also keines der Axiome aus (3).

(4.7) Satz. *Die affine Koordinatenebene* $(K^2, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(2, K)$ *über dem Körper* K *ist pappussch genau dann, wenn* K *kommutativ ist.*

Beweis. Wegen (4.2) gilt (AD), also auch (Ap). Wir können uns daher auf (AP) mit sich schneidenden Geraden G_1, G_2 beschränken. Seien $z = G_1 \cap G_2$ und a_i wie in (AP) gegeben. Zu zeigen ist $\overline{a_1, a_6} \| \overline{a_3, a_4} \iff K$ kommutativ. Wir benutzen (4.1). $\exists \lambda, \mu, \nu, \varrho \in K$ mit

$$a_4 = z + (a_2 - z)\lambda, \quad a_5 = z + (a_1 - z)\mu, \quad \text{und} \quad \overline{a_1, a_2} \| \overline{a_4, a_5} \implies \lambda = \mu.$$

Genauso

$$a_3 = z + (a_5 - z)\nu, \quad a_2 = z + (a_6 - z)\varrho, \quad \text{und} \quad \overline{a_2, a_3} \| \overline{a_5, a_6} \implies \nu = \varrho.$$

Nun gilt:

$$a_3 = z + (a_5 - z)\nu = z + \big(z + (a_1 - z)\lambda - z\big)\nu = z + (a_1 - z)\lambda\nu$$

$$a_4 = z + (a_2 - z)\lambda = z + \big(z + (a_6 - z)\nu - z\big)\lambda = z + (a_6 - z)\nu\lambda$$

d.h. $\overline{a_1, a_6} \| \overline{a_3, a_4} \iff \lambda\nu = \nu\lambda$. Da $\lambda, \nu \in K$ beliebig gewählt waren, folgt die Behauptung. ■

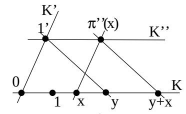
Koordinatisierung desarguesscher affiner Ebenen

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine desarguessche affine Ebene. Das Ziel ist, einen Körper K so zu konstruieren, dass $(A, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{AG}(2, K)$ gilt (Umkehrung von (4.2)).

Seien $0, 1, 1' \in A$ drei nicht kollineare Punkte und $K = \overline{0, 1}$, $K' = \overline{0, 1'}$, $K'' = \{1' \| K\}$ drei Geraden. Wir betrachten folgende Parallelperspektivitäten:

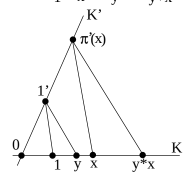
$$\pi' : K \to K';\ x \mapsto \{x \| \overline{1, 1'}\} \cap K' \quad \text{und} \quad \pi'' : K \to K'';\ x \mapsto \{x \| K'\} \cap K''.$$

Für $y \in K$ sei



$$\alpha_y : K \to K;\ x \mapsto \{\pi''(x) \| \overline{1', y}\} \cap K$$

und



$$\mu_y : K \to K;\ x \mapsto \{\pi'(x) \| \overline{1', y}\} \cap K.$$

Wir setzen $y + x := \alpha_y(x)$ und $y \cdot x := \mu_y(x)$.

(4.8) *$\alpha_y(x)$ ist unabhängig von der Wahl von $1'$.*

Beweis. Übung!

Um die folgenden Beweise zu vereinfachen, formulieren wir möglichst einfache (zueinander äquivalente) Axiome für Gruppen.

(4.9) *Sei $(G, \cdot)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung und $e \in G$. Dann sind äquivalent:*

(I) *e ist neutrales Element und $\forall a \in G : \exists\, a' \in G$ mit $a'a = e = aa'$*

(II) *e ist linksneutral (d.h. $\forall a \in G : ea = a$) und $\forall a \in G : \exists\, a' \in G$ mit $a'a = e$.*

(III) *e ist rechtsneutral und $\forall a \in G\ \exists\, a' \in G$ mit $aa' = e$.*

Beweis. Wegen Symmetrie genügt es (II) „$\Longrightarrow$“ (I) zu zeigen. Sei also $a \in G$, dann gilt

$$aa' = (\underbrace{(a')' \cdot a'}_{e}) \cdot (aa') = (a')' \cdot (\underbrace{a'a}_{e}) \cdot a' = (a')' \cdot a' = e.$$

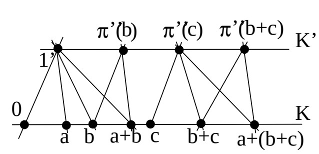
Desweiteren gilt $ae = a \cdot a'a = aa' \cdot a = ea = a$. ■

Bemerkung. Das Lemma gibt äquivalente Definitionen einer Gruppe. Wir werden es im Folgenden stets ohne Hinweis verwenden.

(4.10) *$(K, +)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0.*

Beweis. „$+$“ ist assoziativ: Seien $a, b, c \in K$. Für

$$1', b, \pi''(b), a + b, \pi''(c), b + c, \pi''(b + c), a + (b + c)$$



ist der Scherensatz (4.4.3) anwendbar und dieser zeigt

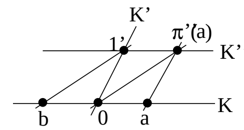
$$\overline{1', a + b} \| \overline{\pi''(c), a + (b + c)}.$$

Daher hat man

$$(a+b)+c = \alpha_{a+b}(c) = \alpha_a(b+c) = a+(b+c).$$

Nach Definition gilt $\alpha_0 = \mathrm{id}$, d. h. $0+x=x$ und 0 ist linksneutral.

Für ein $a \in K$ sei $b := \{1' \| \overline{0, \pi''(a)}\} \cap K$, dann gilt



$$b + a = \alpha_b(a) = \{\pi''(a) \| \overline{1', b}\} \cap K = \overline{0, \pi''(a)} \cap K = 0.$$

Somit ist b linksinvers zu a. ∎

(4.11) Bemerkung. Die Beweise von (4.8) und (4.10) benutzen nur (Ad) in „Richtung K“, d. h. die (Träger-)Geraden G_i sind parallel zu K. (AD) wurde nicht verwendet. Vgl. dazu Aufgabe 24.

Sei $K^* = K \setminus \{0\}$. Analog zu (4.8) und (4.10), aber mit (AD) statt (Ad) zeigt man:

(4.12) *$(K^*, \cdot)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 1. Dabei ist μ_y für alle $y \in K$ unabhängig von der Wahl von $1'$.*

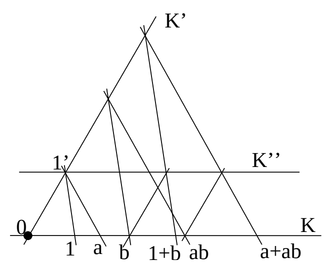
Beweis. Evt. Übung. ∎

(4.13) Satz. *$(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.*

Beweis. Wegen (4.10) und (4.12) sind nur noch die Distributivgesetze zu zeigen (die Kommutativität der Addition folgt dann). Zu $a, b \in K$ zeigen wir zunächst $a(1+b) = a + ab$. Wende (Ad) auf $ab, b, \pi'(b), \pi''(ab), \pi''(b), \pi'(1+b)$ an:
Dann gilt

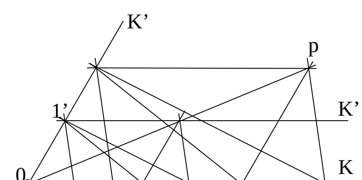
$$\overline{\pi''(ab), \pi'(1+b)} \| \overline{\pi'(b), ab} \| \overline{1', a} \| \overline{\pi''(ab), a+ab}$$

und daher $a + ab = \{\pi'(1+b) \| \overline{1', a}\} \cap K = a(1+b)$. Für $a, b, c \in K$ folgt das Linksdistributivgesetz:



$$a(b+c) = a(b(1+b^{-1}c)) = ab(1+b^{-1}c) = ab + abb^{-1}c = ab + ac.$$

Nun zeigen wir $(1+b)a = a + ba$: Sei $p = \{\pi'(a) \| K\} \cap \overline{0, \pi''(b)}$. Wende (AD) an auf $1+b, 1', \pi''(b), (1+b)a, \pi'(a), p$, somit $\overline{p, (1+b)a} \| \overline{1+b, \pi''(b)} \| \overline{1, 1'} \| \overline{a, \pi'(a)}$. Auch die Punkte $b, 1', \pi''(b), ba, \pi'(a), p$ erfüllen die Voraussetzungen von (AD) und wir erhalten $\overline{ba, p} \| \overline{b, \pi''(b)} \| K'$. Wegen (4.8) kann man $a + ba$ mit $\pi'(a)$ statt mit $1'$ konstruieren, und man erhält



$$a + ba = \{p \| \overline{a, \pi'(a)}\} \cap K = (1+b)a.$$

Daraus folgt das Rechtsdistributivgesetz analog.

$$(b+c)a = ((1+cb^{-1})b)a = (1+cb^{-1})ba = ba + cb^{-1}ba = ba + ca$$

Aus den Distributivgesetzen folgt auch die Kommutativität der Addition. Seien $a, b \in K$, dann gilt

$$(a+b)+(a+b)=(a+b)(1+1)=(a+a)+(b+b),$$

nach Kürzen von a auf der linken Seite und von b auf der rechten ergibt sich $b+a = a+b$. ∎

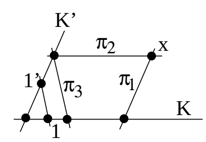
(4.14) Bemerkung. 1. Für das Linksdistributivgesetz ist wieder nur (Ad) erforderlich. Der Beweis ist dann ohne Nutzung des Assoziativgesetzes zu führen.

2. Beim Beweis des Rechtsdistributivgesetzes wird (AD) wirklich benutzt.

3. Für die Assoziativität von „·“ wird (AD) ebenfalls benötigt (nicht aber für die eindeutige Lösbarkeit von $ax = b$ und $ya = b$ nach x bzw. y).

Es bleibt zu zeigen, dass $(A, \mathfrak{G})$ und $A(K^2)$ isomorph sind. Betrachte dazu die Parallelprojektionen bzw. Parallelperspektivitäten

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad A \to K\,; \quad x \mapsto \{x \| K'\} \cap K \\ \pi_2: &\quad A \to K'\,; \quad x \mapsto \{x \| K\} \cap K' \\ \pi_3: &\quad K' \to K\,; \quad x \mapsto \{x \| \overline{1, 1'}\} \cap K \end{aligned}$$



Die Abbildung

$$\varphi : A \to K^2;\ x \mapsto \big(\pi_1(x), (\pi_3 \circ \pi_2)(x)\big)$$

ist offenbar bijektiv.

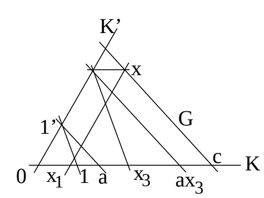
(4.15) Satz. *φ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $G \in \mathfrak{G}$.

1. Fall: $G \| K'$, d. h. $\forall x \in G$ gilt $c = \pi_1(x)$ ist konstant, also $\varphi(G) \subseteq \langle c \rangle$. Umgekehrt gilt $\forall c \in K$: $\varphi^{-1}(\langle c \rangle) \subseteq \pi_1^{-1}(c) \| K'$.

2. Fall: $G \| K$, d. h. $\forall x \in G$ gilt $\pi_2(x) = c' \in K'$ ist konstant, also $\varphi(G) \subseteq \langle 0, \pi_3(c') \rangle$. Umgekehrt gilt $\forall c \in K$: $\varphi^{-1}(\langle 0, c \rangle) \subseteq \pi_2^{-1}(\pi_3^{-1}(c)) \| K$.

3. Fall: $G \not\parallel K, K'$. Sei $c = K \cap G$ und $a = \{1' \| G\} \cap K$. Für $x \in G$ setze $x_1 := \pi_1(x)$ und $x_2 := (\pi_3 \circ \pi_2)(x)$. Dann gilt $ax_2 + x_1 = c$, denn „+“ kann wegen (4.8) auch mit $\pi_2(x)$ (statt mit $1'$) konstruiert werden. Somit



$$x \in G \implies x_2 = a^{-1}c - a^{-1}x_1 \implies \varphi(x) \in \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$$

Ist $\varphi(x) \in \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$, so erhält man $ax_2 + x_1 = c$ und $x \in G$. Insgesamt gilt also $\varphi(G) = \langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle$ und $\varphi^{-1}(\langle -a^{-1}, a^{-1}c \rangle) = \{c \| \overline{a, 1'}\} \in \mathfrak{G}$. ∎

Zusammenfassend erhalten wir den

(4.16) Darstellungssatz. *Sei* $(A, \mathfrak{G})$ *eine desarguessche affine Ebene. Dann existiert ein Körper* K *so, dass* $(A, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{AG}(2, K)$. ■

Hieraus folgt mit (4.5) und (4.7).

(4.17) Satz. *Jede pappussche affine Ebene ist isomorph zu* $\mathrm{AG}(2, K)$ *mit einem kommutativen Körper* K. *Genauer: Jeder koordinatisierende Körper ist kommutativ.* ■

(4.18) Satz. *Jede endliche desarguessche affine Ebene ist pappussch.*

Beweis. Wegen (4.16) wird die Ebene durch einen endlichen Körper koordinatisiert. Nach einem berühmten Satz von Wedderburn (1905) ist jeder endliche Körper kommutativ. Wegen (4.7) gilt (AP). ■

(4.19) Bemerkung. Tatsächlich ist K aus (4.16) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Beweis später.

Schließungssätze in projektiven Ebenen

Definition. Eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ heißt *desarguessch*, wenn das folgende *projektive Axiom von Desargues* erfüllt ist:

(PD) Zu $G_1, G_2, G_3 \in \mathfrak{G}$, verschieden und kopunktal, sei $z = G_1 \cap G_2 \cap G_3$. Seien $a_i, b_i \in G_i \setminus \{z\}$ verschieden. Dann liegen $\overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}, i \neq j$, kollinear. Setzt man $p_k = \overline{a_i, a_j} \cap \overline{b_i, b_j}$ für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, so gilt also $p_3 \in L := \overline{p_1, p_2}$.

z heißt *Zentrum*, L heißt *Achse* der Desargues-Konfiguration.

Die Konfiguration heißt „*kleiner projektiver Desargues*“ (Pd), wenn $z \in L$.

Eine projektive Ebene heißt *Moufang-Ebene*[6], wenn stets (Pd) gilt.

Eine projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ heißt *pappussch*, wenn das folgende *projektive Axiom von Pappos* erfüllt ist:

(PP) Sei $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ mit $z = G_1 \cap G_2$ und $a_1 \ldots a_6 \in P$, verschieden, mit $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \setminus \{z\}$ und $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \setminus \{z\}$. Dann liegen die Punkte $\overline{a_1, a_2} \cap \overline{a_4, a_5}$, $\overline{a_2, a_3} \cap \overline{a_5, a_6}$, $\overline{a_1, a_6} \cap \overline{a_3, a_4}$ kollinear.

(4.20) Bemerkung. 1. Die Figur des Axioms (PD) ist in hohem Maße symmetrisch. Erwähnt seien

[6] Ruth Moufang 1905–1977

- Sie besteht aus 10 Punkten und 10 Geraden.
- Jeder Punkt kann Zentrum, jede Gerade Achse sein.
- Die Figur ist selbstdual.

2. Ist $(P, \mathfrak{G})$ eine desarguessche bzw. pappussche projektive Ebene, so ist P_L offenbar desarguessch bzw. pappussch für jedes $L \in \mathfrak{G}$. Ist P eine Moufang-Ebene, so gilt (Ad) in jedem P_L. Dass teilweise (aber nicht immer) die Umkehrungen gelten, werden wir noch sehen.

(4.21) Satz. *Für einen Körper K ist $\mathrm{PG}(2, K)$ stets desarguessch. Ferner ist $\mathrm{PG}(2, K)$ genau dann pappussch, wenn K ist kommutativ ist.*

Beweis. Übung. ∎

(4.22) Darstellungssatz. *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine desarguessche projektive Ebene, dann existiert ein Körper K so, dass $(P, \mathfrak{G})$ und $\mathrm{PG}(2, K)$ isomorph sind.*

Beweis. Zu $L \in \mathfrak{G}$ betrachte die desarguessche affine Ebene P_L. Nach (4.16) existiert ein Körper K mit $P_L \cong \mathrm{AG}(2, K)$. Der projektive Abschluss von P_L ist einerseits nach (3.3.3) (vgl. Aufgabe 17) isomorph zu $(P, \mathfrak{G})$, andererseits nach (3.11.3) isomorph zu $\mathrm{PG}(2, K)$. ∎

(4.23) Satz. *Jede pappussche projektive Ebene $(P, \mathfrak{G})$ ist desarguessch und kann durch einen kommutativen Körper K koordinatisiert werden.*

Beweis. Sei eine Konfiguration wie in (PD) gegeben. Setze $L = \overline{p_1, p_2}$. Zu zeigen ist $p_3 \in L$. Die affine Ebene P_L ist pappussch, also nach dem Satz von Hessenberg (4.5) desarguessch. Daraus folgt $p_3 \in L$. Wegen (4.17) (oder (4.7)) ist K kommutativ. ∎

(4.24) Satz. *Sei $(P, \mathfrak{G})$ eine projektive Ebene und $L \in \mathfrak{G}$ beliebig. Dann gilt:*

$$P \text{ desarguessch (pappussch)} \iff P_L \text{ desarguessch (pappussch)}$$

Speziell ist der projektive Abschluss einer affinen desarguesschen (pappusschen) Ebene wieder desarguessch (pappussch).

Beweis. Nur „$\Longleftarrow$" ist zu zeigen: Sei P_L desarguessch (pappussch). Wegen (4.16) bzw. (4.17) ist $P_L \cong \mathrm{AG}(2, K)$ für einen (kommutativen) Körper K. Dann gilt $P \cong \mathrm{PG}(2, K)$ und wegen (4.21) ist P desarguessch (pappussch). ∎

Direkt aus (4.18) und (4.24) ergibt sich

(4.25) Satz. *Jede endliche desarguessche projektive Ebene ist pappussch.* ∎

(4.26) Bemerkung. (1) Eine zu (4.24) analoge Aussage mit (Ad) und (Pd) ist falsch. Genauer: Die affine Ebene $A(F^2)$ über einem planaren Fastkörper F erfüllt (Ad). Wenn F kein Körper ist, so ist der projektive Abschluss P aber keine Moufangebene. Wenn H die Ferngerade bezeichnet, so gilt (Pd) nur für die Achse H.

(2) Bildet man in der obigen Bemerkung P_G mit einer Geraden $G \neq H$, so ist $P_G \ncong P_H$. Evt. Übung und (3.5.3)

(3) Aus (PD) folgt nach (4.4.2) wie im Beweis von (4.23) die zu (PD) duale Aussage (PD'). (Beachte: Die Figur ist dieselbe wie für (PD)!).

Durch Übergang zur dualen Ebene erkennt man, dass auch (PD') $\implies$ (PD) gilt. Das liefert einen gültigen Beweis für (AD') $\implies$ (AD). Außerdem zeigt es, dass die Klasse der desarguesschen projektiven Ebenen *selbstdual* ist, d. h. auch die duale Ebene ist wieder desarguessch. Daher ist das Dualitätsprinzip (3.10) auf diese Klasse anwendbar.

(4) Aufgabe 15 und (4.24) zeigen, dass auch die Klasse der pappusschen projektiven Ebenen selbstdual ist.

(5) Die Konstruktion des Körpers geht auf Hilbert[7] (1899) zurück. Nach Hilbert wird sie auch *Streckenrechnung* genannt. Später wurden mit modifizierten Methoden auch nichtdesarguessche Ebenen koordinatisiert (mit sog. *Ternärkörpern* (Hall 1943)[8]).

[7] David Hilbert 1862–1943

[8] Marshall Hall Jr 1910–1990

5 Automorphismen

Zunächst stellen wir einen Zusammenhang zwischen Automorphismen einer affinen Ebene und ihrem projektiven Abschluss her.

(5.1) Fortsetzungssatz. *Sei* $(A, \mathfrak{G})$ *eine affine Ebene mit projektivem Abschluss* $(P, \mathfrak{G}')$ *und Ferngerade* F*. Sei weiter* $\alpha \in \operatorname{Aut}(A, \mathfrak{G})$*. Dann gilt:*

(1) $\forall G, H \in \mathfrak{G} : \; G \| H \iff \alpha(G) \| \alpha(H)$.

(2) $\alpha^* : P \to P; \, x \mapsto \begin{cases} \alpha(x) & \text{für } x \in A \\ [\alpha(G)] & \text{für } x = [G] \in F \end{cases}$ *ist Automorphismus von* $(P, \mathfrak{G}')$.

(3) α^* *ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung von* α *(die Kollineation ist).*

(4) *Die Abbildung* $\operatorname{Aut}(A, \mathfrak{G}) \to \operatorname{Aut}(P, \mathfrak{G}'); \, \alpha \mapsto \alpha^*$ *ist ein Gruppen-Monomorphismus (injektiver Homomorphismus).*

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: Seien $G \| H$ und $p \in \alpha(G) \cap \alpha(H)$. Dann folgt $\alpha^{-1}(p) \in G \cap H$, also $G = H \implies \alpha(G) \| \alpha(H)$. „$\Longleftarrow$“ aus Symmetriegründen.

(2) Wegen (1) ist α^* wohldefiniert und injektiv, denn

$$[\alpha(G)] = [\alpha(H)] \iff G \| H \iff [G] = [H].$$

$(\alpha^{-1})^*$ ist Inverse von α^*, also ist α^* bijektiv.

α^* ist Kollineation: Sei $K \in \mathfrak{G}'$.

1. Fall: $K = F \implies \alpha^*(F) = F \in \mathfrak{G}'$.

2. Fall: $K = G \cup \{[G]\}$ mit $G \in \mathfrak{G}$: $\alpha^*(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\} \in \mathfrak{G}'$. Dasselbe gilt für $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$.

(3) Für $\alpha' \in \operatorname{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\alpha'|_A = \alpha$ gilt $\alpha'(G \cup \{[G]\}) = \alpha(G) \cup \{[\alpha(G)]\}$ (da Gerade!). Für alle $H \in \mathfrak{G}'$ gilt daher $\alpha'|_H = \alpha^*|_H$. Das zeigt $\alpha' = \alpha^*$.

(4) Injektivität ist klar (denn $\alpha^*|_A = \alpha$), Homomorphieeigenschaft wie folgt: Es gilt $(\alpha^* \circ \beta^*)|_A = \alpha^*|_A \circ \beta^*|_A$, wegen (3) folgt $\alpha^* \circ \beta^* = (\alpha \circ \beta)^*$. ∎

(5.2) Bemerkung. (1) Wegen (5.1.4) kann man $\operatorname{Aut} A$ als Untergruppe von $\operatorname{Aut} P$ auffassen.

(2) Sei $(P, \mathfrak{G})$ projektive Ebene und $F \in \mathfrak{G}$. Für $\sigma \in \operatorname{Aut}(P, \mathfrak{G})$ mit $\sigma(F) = F$ ist $\sigma|_{P_F} \in \operatorname{Aut}(P_F, \mathfrak{G}_F)$ und $(\sigma|_{P_F})^* = \sigma$ (vgl. (5.1.3)).

(3) Im Fall $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$, d.h. $\forall x \in F : \sigma(x) = x$, ist $\sigma|_{P_F}$ eine Dilatation.

Die Fundamentalsätze

In diesem Abschnitt werden Beispiele von Automorphismen in affinen und projektiven Koordinatenebenen beschrieben. Ziel sind die Fundamentalsätze, die eine genaue Beschreibung aller Automorphismen enthalten. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Abbildung.

Seien (V, K) und (V', K') Vektorräume über Körpern K bzw. K' und $\widehat{\sigma} : K \to K'$ eine Bijektion. Eine Abbildung $\sigma : V \to V'$ heißt *semilinear* mit *Begleitisomorphismus* $\widehat{\sigma}$, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) \qquad \text{und} \qquad \sigma(v\lambda) = \sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda).$$

Die Bezeichnung Begleit*isomorphismus* ist gerechtfertigt wegen

(5.3) *Falls es $v \in V$ gibt, mit $\sigma(v) \neq 0$, dann ist $\widehat{\sigma}$ ein Körperisomorphismus, der durch σ eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Für $\alpha, \beta \in K$ berechne $\sigma\big(v(\alpha + \beta)\big)$ und $\sigma(v\alpha\beta)$ jeweils auf zwei Weisen. Die Eindeutigkeit ist klar. ∎

Bemerkung. In unseren Anwendungen ist σ meist bijektiv. Also ist $\widehat{\sigma}$ ein durch σ festgelegter Körperisomorphismus. Häufig gilt darüberhinaus $K = K'$ und $\widehat{\sigma} \in \operatorname{Aut} K$.

(5.4) Beispiele. (1) Im Fall $K = K'$ ist jede lineare Abbildung $\sigma : V \to V'$ semilinear mit $\widehat{\sigma} = \mathrm{id}$.

(2) Sei $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $n \in \mathbb{N}$, dann ist

$$\Gamma_\alpha : K^n \to K'^n;\ (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))^T$$

eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α.

Um eine analoge Abbildung $V \to V'$ für beliebige K- bzw. K'-Vektorräume zu definieren, müssen Basen für V und V' gewählt werden.

(3) Allgemeiner: Sei wieder $\alpha : K \to K'$ ein Körperisomorphismus und $M \in \mathrm{GL}(n, K')$, dann ist $K^n \to K'^n;\ x \mapsto M\Gamma_\alpha(x)$ eine (bijektive) semilineare Abbildung mit Begleitisomorphismus α. (So kann man alle bijektiven semilinearen Abbildungen $K^n \to K'^n$ beschreiben!)

(4) Für $\mu \in K \setminus \{0\}$ ist $\varrho_\mu : K^n \to K^n;\ (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto (x_1\mu, \dots, x_n\mu)^T$ semilinear mit $\widehat{\varrho_\mu}(\lambda) = \mu^{-1}\lambda\mu$. Ist K kommutativ, dann ist ϱ_μ natürlich linear.

(5.5) *Sei (V, K) ein Vektorraum.*

(1) *Die Menge $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ aller bijektiven semilinearen Abbildungen $V \to V$ bildet eine Gruppe. Dabei gilt $\widehat{\sigma^{-1}} = \widehat{\sigma}^{-1}$.*

(2) *Für* $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ *gilt* $\widehat{\sigma \circ \tau} = \widehat{\sigma} \circ \widehat{\tau}$. *D. h.* $\widehat{\ } : \Gamma\mathrm{L}(V, K) \to \operatorname{Aut} K;\ \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern* $\mathrm{GL}(V, K)$.

Beweis. (1) Assoziativität ist klar, das neutrale Element ist id. σ^{-1} existiert (da σ bijektiv ist) und ist semilinear wegen

$$\sigma^{-1}(\sigma(v) + \sigma(w)) = \sigma^{-1}\sigma(v + w) = v + w = \sigma^{-1}\sigma(v) + \sigma^{-1}\sigma(w)$$

und

$$\sigma^{-1}(\sigma(v)\widehat{\sigma}(\lambda)) = \sigma^{-1}(\sigma(v\lambda)) = v\lambda = \sigma^{-1}\sigma(v) \cdot \widehat{\sigma}^{-1}\widehat{\sigma}(\lambda).$$

(2) $\sigma \circ \tau(v\lambda) = \sigma(\tau(v)\widehat{\tau}(\lambda)) = \sigma(\tau(v)) \cdot \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(\lambda))$, also $\widehat{\sigma \circ \tau} = \widehat{\sigma} \circ \widehat{\tau}$. ■

(5.6) Bemerkung. 1. Im Fall $K \in \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ gilt $\operatorname{Aut} K = \{\mathrm{id}\}$, also $\Gamma\mathrm{L}(V, K) = \mathrm{GL}(V, K)$. In den Fällen $K = \mathbb{C}$ oder $K = \mathrm{GF}(p^n), n > 1$, gilt jedoch $\operatorname{Aut} K \neq \{\mathrm{id}\}$.

2. Sei $\sigma : K^n \to K'^m$ semilinear, dann ist $\sigma \circ \Gamma_{\widehat{\sigma}}^{-1}$ K'-linear. So folgert man die Bemerkung im obigen Beispiel (3).

(5.7) *Sei* (V, K) *ein Vektorraum und* $(A, \mathfrak{G}) := \mathrm{AG}(V, K)$. *Für alle* $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ *und* $a \in V$ *sind* $\sigma : A \to A$ *und* $\tau_a : A \to A;\ x \mapsto x + a$ *Automorphismen von* $(A, \mathfrak{G})$.

Beweis. $\tau_a \in \operatorname{Aut}(A, \mathfrak{G})$ ist klar ($\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$). Seien $b, c \in V$, $c \neq 0$. Dann gilt

$$\sigma(b + cK) = \sigma(b) + \sigma(cK) = \sigma(b) + \sigma(c)\widehat{\sigma}(K) = \sigma(b) + \sigma(c)K \in \mathfrak{G}.$$

Das gilt auch für σ^{-1}, also ist σ eine Kollineation. ■

Das Lemma gilt insbesondere für affine Koordinatenebenen $\mathrm{AG}(2, K)$.

Im Fall $V = K^n$ schreibt man $\Gamma\mathrm{L}(n, K) = \Gamma\mathrm{L}(V, K)$. Man findet also $\Gamma\mathrm{L}(2, K)$ als Untergruppe in $\operatorname{Aut} \mathrm{AG}(2, K)$.

Auch für projektive Ebenen gilt ein ähnlicher Satz.

(5.8) *Sei* K *ein Körper und* $(P, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2, K)$.

(1) *Für jedes* $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(3, K)$ *ist* $\overline{\sigma} : P \to P;\ aK \mapsto \sigma(a)K$ *ein Automorphismus von* $(P, \mathfrak{G})$, *die von* σ induzierte Kollineation.

(2) *Die Abbildung* $\Gamma\mathrm{L}(3, K) \to \operatorname{Aut}(P, \mathfrak{G});\ \sigma \mapsto \overline{\sigma}$ *ist ein Homomorphismus bzgl.* $\circ$ *mit Kern* $\varrho_K := \{\varrho_\lambda;\ \lambda \in K^*\}$, *wobei* $\varrho_\lambda(x) = x\lambda$.

Beweis. (1) $\overline{\sigma}$ ist wohldefiniert: $aK = bK \iff \exists\lambda \in K \setminus \{0\} : a = b\lambda$ und

$$\overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = \sigma(b\lambda)K = \sigma(b)\widehat{\sigma}(\lambda)K = \sigma(b)K = \overline{\sigma}(bK).$$

$\overline{\sigma}$ ist bijektiv: $\overline{\sigma^{-1}}$ ist Umkehrabbildung von $\overline{\sigma}$.

Seien $a, b \in K^3$ linear unabhängig und $\lambda, \mu \in K$. Dann sind auch $\sigma(a), \sigma(b)$ linear unabhängig, und es gilt

$$\sigma(a\lambda + b\mu) = \sigma(a\lambda) + \sigma(b\mu) = \sigma(a)\widehat{\sigma}(\lambda) + \sigma(b)\widehat{\sigma}(\mu) \in \sigma(a)K + \sigma(b)K \in \mathfrak{G},$$

d.h. $\overline{\sigma}(aK + bK) \subseteq \sigma(a)K + \sigma(b)K$. Dasselbe gilt für $\overline{\sigma}^{-1}$, daher folgt $\overline{\sigma}(aK + bK) = \sigma(a)K + \sigma(b)K \in \mathfrak{G}$ und $\overline{\sigma}$ ist eine Kollineation.

(2) Homomorphie von $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$: Für $\sigma, \tau \in \Gamma\mathrm{L}(3, K)$ gilt

$$(\overline{\tau} \circ \overline{\sigma})(aK) = \overline{\tau}(\sigma(a)K) = (\tau \circ \sigma)(a)K = \overline{\tau \circ \sigma}(aK) \implies \overline{\tau} \circ \overline{\sigma} = \overline{\tau \circ \sigma}.$$

Sei nun $\sigma \in \operatorname{Kern} \overline{}$, d.h. $\forall a \in K^3 : \overline{\sigma}(aK) = \sigma(a)K = aK$. Dann existiert für alle $a \in K^3$ ein $\lambda_a \in K$ mit $\sigma(a) = a\lambda_a$. Zu zeigen ist $\forall b \in K^3 : \lambda_b = \lambda_a$.

Seien zunächst $a, b \in K^3$ linear unabhängig. Dann gilt

$$a\lambda_{a+b} + b\lambda_{a+b} = (a + b)\lambda_{a+b} = \sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b) = a\lambda_a + b\lambda_b$$

und ein Koefizientenvergleich liefert $\lambda_a = \lambda_{a+b} = \lambda_b$.

Zu linear abhängigen a, b wähle $c \in K^3$ mit b, c linear unabhängig, dann sind auch a, c linear unabhängig. Nun schließt man aus dem vorigen Paragraphen $\lambda_b = \lambda_c = \lambda_a$.

Insgesamt ist somit λ_a unabhängig von a, etwa $\lambda := \lambda_a$. Das zeigt $\forall a \in K^3 : \sigma(a) = a\lambda = \varrho_\lambda(a)$, also $\sigma = \varrho_\lambda$ und $\operatorname{Kern} \overline{} \subseteq \varrho_K$. Die andere Inklusion ist trivial. ∎

Wir formulieren jetzt die Fundamentalsätze, die in gewissem Sinn die Umkehrungen der beiden obigen Sätze sind. Die Beweise werden später in allgemeinerem Zusammenhang geführt.

(5.9) Fundamentalsatz für affine Ebenen. *Seien K und K' Körper, und sei $T' := T(\mathrm{AG}(2, K'))$ die Translationsgruppe von $\mathrm{AG}(2, K')$. Für jede Kollineation $\varphi : \mathrm{AG}(2, K) \to \mathrm{AG}(2, K')$ existiert genau ein $\tau \in T'$ und genau eine semilineare Bijektion $\sigma : K^2 \to K'^2$ mit $\varphi = \tau \circ \sigma$.*

(5.10) Fundamentalsatz für projektive Ebenen. *Seien K und K' Körper. Zu jeder Kollineation $\varphi : \mathrm{PG}(2, K) \to \mathrm{PG}(2, K')$ existiert eine semilineare Bijektion $\sigma : K^3 \to K'^3$ mit $\varphi = \bar{\sigma}$.*

(5.11) Bemerkung. 1. Die Aussage in (5.10) besagt, dass die Abbildung $\overline{}$ aus (5.8.2) surjektiv ist.

2. (5.7) und (5.8) zeigen, dass Koordinatentransformationen die Geometrie nicht ändern. Der letzte Schritt im Beweis (3.12) ist damit gezeigt.
3. Eine wichtige Folgerung aus den Fundamentalsätzen ist die Tatsache, dass verschiedene koordinatisierende Körper von affinen bzw. projektiven Ebenen zueinander isomorph sind.

   Prägnant ausgedrückt: Der Koordinatenkörper einer affinen bzw. projektiven Ebenen ist bis auch Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wir betrachten jetzt den Fortsetzungssatz (5.1) für den Fall $\mathrm{AG}(2,K)$ mit projektivem Abschluss $\mathrm{PG}(2,K)$ mit einem Körper K. Zu $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(2,K)$ existiert nach (5.6.2) ein $M \in \mathrm{GL}(2,K)$ mit

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{12}\widehat{\sigma}(x_2) \\ m_{21}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{22}\widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix}.$$

Sei $\iota : A \to P ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} K$ die kanonische Einbettung aus (3.11). Sei ferner $a \in K^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\tau_a \circ \sigma)^*(\iota(x)) &= \iota(\tau_a \circ \sigma(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 + m_{11}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{12}\widehat{\sigma}(x_2) \\ a_2 + m_{21}\widehat{\sigma}(x_1) + m_{22}\widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} K \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & m_{11} & m_{12} \\ a_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \widehat{\sigma}(x_1) \\ \widehat{\sigma}(x_2) \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ a_1 & \\ a_2 & \mathrm{M} \end{pmatrix} \Gamma_{\widehat{\sigma}}\, \iota(x). \end{aligned}$$

Daher ist $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ a_1 & \\ a_2 & \mathrm{M} \end{pmatrix} \Gamma_{\widehat{\sigma}}$ gegeben.

(5.12) *Für einen Körper K sei die lineare Bijektion $\sigma : K^2 \to K^2$, beschrieben durch die Matrix $M \in \mathrm{GL}(2,K)$, und es sei $a \in K^2$. Dann wird $(\tau_a \circ \sigma)^*$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ a_1 & \\ a_2 & M \end{pmatrix}$ induziert.* ∎

Zentralkollineationen

Definition. Sei σ ein Automorphismus der affinen bzw. projektiven Ebene $(P, \mathfrak{G})$. Eine Gerade L heißt *Achse* von σ, wenn $\forall x \in L : \ \sigma(x) = x$, d. h. L ist eine Fixpunktgerade.

Dual dazu: $z \in P$ heißt *Zentrum* von σ, wenn für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$ gilt: $\sigma(G) = G$. Das impliziert natürlich $\sigma(z) = z$.

(5.13) *Sei* $(P, \mathfrak{G})$ *eine projektive Ebene und* $\sigma \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$. *Dann gilt:*

(1) *Wenn* σ *eine Achse* L *besitzt, dann hat* σ *ein Zentrum* z.

(2) *Wenn* σ *ein Zentrum* z *besitzt, dann hat* σ *eine Achse* L.

Beweis. (1) 1. Fall: $\exists z \in P \setminus L : \sigma(z) = z$. Dann gilt für alle $G \in \mathfrak{G}$ mit $z \in G$:

$$\sigma(G \cap L) = G \cap L \quad \text{also} \quad G = \overline{z, G \cap L} \implies \sigma(G) = \overline{\sigma(z), \sigma(G \cap L)} = \overline{z, G \cap L} = G$$

und z ist ein Zentrum.

2. Fall: $\forall z \in P \setminus L : \sigma(z) \neq z$. Geraden der Form $\overline{a, \sigma(a)}$ mit $a \in P \setminus L$ werden dann von σ fest gelassen: Sei $z = L \cap \overline{a, \sigma(a)}$. Dann

$$\sigma(\overline{a, \sigma(a)}) = \sigma(\overline{a, z}) = \overline{\sigma(a), \sigma(z)} = \overline{\sigma(a), z} = \overline{a, \sigma(a)}.$$

Sei nun $G = \overline{b, z}$ eine weitere Gerade durch z. Für $y = \overline{a, \sigma(a)} \cap \overline{b, \sigma(b)}$ gilt dann $\sigma(y) = y$. Also muss gelten $y \in L$ und $y = z$. Es folgt $G = \overline{b, z} = \overline{b, \sigma(b)}$ und somit $\sigma(G) = G$. Daher ist z ein Zentrum.

(2) ist dual zu (1). ■

Definition. Eine Kollineation σ der projektiven Ebene P heißt *Zentralkollineation*, wenn sie ein Zentrum z und damit auch eine Achse L besitzt.

σ heißt *Homologie*, wenn $z \notin L$, und *Elation*, wenn $z \in L$.

(5.14) *Sei* σ *Zentralkollineation der projektiven Ebene* $(P, \mathfrak{G})$ *mit Zentrum* z *und Achse* L. *Dann gilt:*

(1) *Durch ein Paar* $(p, \sigma(p))$ *mit* $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$ *ist* σ *eindeutig bestimmt. Genauer: Für* $x \in P \setminus (L \cup \{z\})$ *gilt* $\sigma(x) = \overline{x, z} \cap \overline{\overline{p, x} \cap L, \sigma(p)}$ *(falls* $x \notin \overline{p, z}$*).*

Für $x \in \overline{p, z}$ *wähle einen Hilfspunkt* $q \notin \overline{p, z}$ *um* $\sigma(x)$ *wie oben zu konstruieren.*

(2) *Äquivalent sind*

(I) $\sigma = \mathrm{id}$.

(II) *Es gibt einen Fixpunkt* $p \in P \setminus (L \cup \{z\})$.

(III) *Es gibt eine Fixgerade* $G \neq L$ *mit* $z \notin G$.

Beweis. (1) $\sigma(x) \in \sigma(\overline{x,z}) = \overline{x,z}$, da $z \in \overline{x,z}$. Sei $r := \overline{p,x} \cap L$. Dann

$$\sigma(r) = r \quad \text{und} \quad \sigma(x) \in \sigma(\overline{x,p}) = \sigma(\overline{r,p}) = \overline{\sigma(r), \sigma(p)} = \overline{r, \sigma(p)}, \quad \text{falls } x \notin \overline{p,z}.$$

Der Rest ist klar.

(2) (II) $\Longrightarrow$ (I): Konstruiere $\sigma(x)$ wie in (1) aus z und $p = \sigma(p)$. Dann folgt $\forall x \in P$: $\sigma(x) = x$ und $\sigma = \mathrm{id}$.

„(III) $\Longrightarrow$ (I)“ ist dual dazu. Der Rest ist klar. ∎

(5.15) Bemerkung. 1. Ist σ eine Zentralkollineation mit Achse L, dann ist $\sigma|_{P_L}$ eine Dilatation.

2. Das Argument zum 2. Fall kann auch in der affinen Ebene P_L mit $\sigma|_{P_L}$ formuliert werden. $\sigma|_{P_L}$ ist dann eine Translation mit Richtung z.

3. Zentrum und Achse einer Zentralkollineation $\neq \mathrm{id}$ sind eindeutig bestimmt. Insbesondere ist id die einzige Kollineation, die zugleich Homologie und Elation ist.

4. Die Begriffe „Zentrum“ und „Achse“ wurden auch im Zusammenhang mit dem projektiven Axiom von Desagues erwähnt. Tatsächlich besteht eine Zusammenhang. Gilt nämlich (PD) für festes Zentrum z und feste Achse L, so existieren „maximal viele“ Zentralkollineationen mit eben diesem Zentrum und dieser Achse.

Affinitäten

Definition. Automorphismen affiner Ebenen werden auch *Affinitäten* genannt. Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene mit projektivem Abschluss $(P, \mathfrak{G}')$ und Ferngerade F.

$\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ heißt *Dilatation*, wenn α^* eine Zentralkollineation mit Achse F ist. Die Dilatation heißt *Streckung*, wenn α^* eine Homologie ist (also ein Zentrum in A hat), und *Translation*, wenn α^* eine Elation ist (also $\alpha \neq \mathrm{id} \Longrightarrow \forall x \in A : \alpha(x) \neq x$).

$\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$ heißt *Achsenaffinität*, wenn α eine Achse L besitzt. Insbesondere heißt α *Scherung*, wenn α^* Elation mit Zentrum auf F ist (d. h. $\alpha \neq \mathrm{id} \Longrightarrow \forall x \in A \setminus L : \overline{x, \alpha(x)} \| L$).

Eine Achsenaffinität heißt *Affinspiegelung*, wenn α^* eine Homologie mit Zentrum auf F ist und zusätzlich $\alpha^2 = \mathrm{id} \neq \alpha$ gilt.

(5.16) Bemerkung. (1) Die Definition einer Dilatation aus Aufgabe 6 ist äquivalent zur hier gegebenen.

(2) Während die Definitionen von Streckung und Translation komplementär sind, existieren durchaus Achsenaffinitäten $\neq \mathrm{id}$, die weder Scherung noch Affinspiegelung sind:

(3) Es gibt eine Reihe weiterer Affinitäten, die (gerade auch in Schulbüchern) einen eigenen Namen haben. Darstellung in der Form $x \mapsto Mx + t$ mit einer regulären 2×2-Matrix M und $t \in K^2$:

Euleraffinität, M hat zwei verschiebene Eigenwerte.

Schubscherung, $x \mapsto Mx$ ist eine Scherung mit Achse L, $t \neq 0$, und $tK \nparallel L$. Es gibt keine Fixpunkte und keine Fixgeraden.

In den folgenden Kapiteln werden weitere Beispiele betrachtet, wie Spiegelungen, Drehungen usw.

(4) Falls α^* eine Zentralkollineation ist, dann gilt: F ist deren Achse oder $z \in F$.

In der Tat gilt

(5.17) *Sei $\alpha \neq \mathrm{id}$ eine Affinität der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$. Dann gilt:*

(1) *Ist $z \in A$ Zentrum, so hat α keinen weiteren Fixpunkt und jede Fixgerade geht durch z.*

(2) *Ist $L \in \mathfrak{G}$ Achse von α, so liegen alle Fixpunkte auf L. Die Menge der Fixgeraden ($\neq L$) bilden eine Parallelklasse, nämlich $[\overline{x, \alpha(x)}]$ für $x \in A \setminus L$.*

(3) *α hat höchstens eine Achse und höchstens ein Zentrum, aber nicht beides zugleich.*

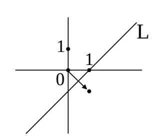
Beweis. Übung. ∎

(5.18) Bemerkung. (1) (5.17.1), „keinen weiteren Fixpunkt" wurde in Aufgabe 6(c) schon gezeigt.

(2) Wegen (5.14.1) ist jede Dilatation und jede Achsenaffinität durch ein Punkt-Bildpunkt-Paar (a, b) eindeutig bestimmt, falls $a, b \neq z$ bzw. $a, b \notin L$, d.h. (5.14) gilt sinngemäß für Dilatationen und Achsenaffinitäten.

Beispiel. In $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{AG}(2, \mathbb{R}))$ mit Achse

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Wir versuchen den Ansatz $\alpha(x) = \mathbf{M}x + v$ mit unbestimmten Koeffizienten in $\mathbf{M}, v$. Das Einsetzen von Punkten aus L und $0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$ führt auf $\mathbf{M} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Sei $(A, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene. Es bezeichne $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ die Gruppe aller Automorphismen, $\Delta = \Delta(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Dilatationen und $T = T(A, \mathfrak{G})$ die Menge aller Translationen.

(5.19) *T ist Normalteiler von Δ und dies ist Normalteiler von* $\operatorname{Aut}(A, \mathfrak{G})$*.*

Beweis. Aufgabe 10. ∎

(5.20) *In der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G})$ gilt (Ad) genau dann, wenn T auf A transitiv operiert, d. h. $\forall a, b \in A\, \exists \tau \in T$ mit $\tau(a) = b$.*

$(A, \mathfrak{G})$ heißt dann *Translationsebene.*

Beweis. Übung!

„$\Longrightarrow$“: Seien $a, b \in A, a \neq b$. Konstruiert wird ein Isomorphismus τ mit $\tau(a) = b$. Anschließend wird $\tau \in T$ gezeigt. Definiere τ wie folgt:

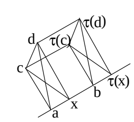
$$\text{Für } x \in A \setminus \overline{a, b} \text{ sei} \quad \tau(x) = \{b \| \overline{a, x}\} \cap \{x \| \overline{a, b}\}.$$

Zu $x \in \overline{a, b}$ wähle $c \in A \setminus \overline{a, b}$ und setze $\tau(x) = \{\tau(c) \| \overline{c, x}\} \cap \overline{a, b}$.

Wir zeigen

(a). *τ ist unabhängig von der Wahl von c.*

Sei $d \in A \setminus \overline{a, b}$ und τ' definiert wie τ, jedoch mit d statt mit c. Wir zeigen $\tau(x) = \tau'(x)$ für alle $x \in \overline{a, b}$; daraus folgt sofort $\tau = \tau'$:



1. Fall: $d \notin \overline{c, \tau(c)} = \{c \| \overline{a, b}\}$, dann erfüllt $c, a, d, \tau(c), b, \tau(d)$ die Voraussetzungen von (Ad), also $\overline{c, d} \| \overline{\tau(c), \tau(d)}$. Zu $x \in \overline{a, b}$ erfüllen $x, c, d, \tau(x), \tau(c), \tau(d)$ ebenfalls die Voraussetzungen von (Ad), also gilt $\overline{x, d} \| \overline{\tau(x), \tau(d)}$, d.h. $\tau(x) = \tau'(x)$.

2. Fall: $d \in \overline{c, \tau(c)}$. Wähle Hilfspunkt $e \notin \overline{c, \tau(c)} \cup \overline{a, b}$ und benutze den 1. Fall zweimal (die Existenz des Hilfspunktes ist nur dann gesichert, wenn $\operatorname{ord} A \geq 3$. Im Fall $\operatorname{ord} A = 2$ gilt $A \cong \mathrm{AG}(2, \mathbb{Z}_2)$; dies ist eine Translationsebene).

Das zeigt (a) und τ ist wohldefiniert.

Nun wird bewiesen

(b). *Für kollineare $x, y, z \in A$ sind $\tau(x), \tau(y), \tau(z)$ kollinear und es gilt $\overline{x, y} \| \overline{\tau(x), \tau(y)}$.*

1. Fall: $\overline{x, y} \| \overline{a, b}$: Nach Konstruktion gilt $\overline{\tau(x), \tau(y)} = \overline{x, y}$ und $\tau(z) \in \overline{x, y} = \overline{\tau(x), \tau(y)}$. Insbesondere gilt $\overline{x, y} \| \overline{\tau(x), \tau(y)}$.

2. Fall: $\exists c = \overline{x, y} \cap \overline{a, b}$. Wegen (a) gilt

$$\tau(c) = \{\tau(x) \| \overline{x, c}\} \cap \overline{a, b} \quad \text{sowie} \quad \tau(c) = \{\tau(y) \| \overline{y, c}\} \cap \overline{a, b}, \quad \text{also} \quad \tau(c) \in \overline{\tau(x), \tau(y)}.$$

Entsprechend

$$\tau(c) \in \overline{\tau(x), \tau(z)} \implies \tau(z) \in \overline{\tau(c), \tau(x)} = \overline{\tau(c), \tau(y)}.$$

Das zeigt auch

$$\overline{x,y}\|\overline{\tau(x),\tau(y)}, \quad \text{denn} \quad \overline{x,y} = \overline{x,c}\|\overline{\tau(x),\tau(c)} = \overline{\tau(x),\tau(y)}.$$

Daher gilt (b).

Sei nun τ' wie τ definiert, aber mit $\tau'(b) = a$. Nach Konstruktion gilt $\tau' \circ \tau = \mathrm{id}$ (zunächst für $x \notin \overline{a,b}$ usw.). Wegen Symmetrie gilt auch $\tau \circ \tau' = \mathrm{id}$, also ist τ' die Inverse von τ und τ ist bijektiv. Für τ' gilt ebenfalls (b), daher ist τ eine Kollineation und wegen

$$\forall x, y \in A, x \neq y : \overline{x,y}\|\overline{\tau(x),\tau(y)} = \tau(\overline{x,y}),$$

ist τ sogar eine Dilatation. Da $\overline{x,\tau(x)}\|\overline{y,\tau(y)}$ für alle $x, y \in A$ kann es keine Fixpunkte geben, also $\tau \in T$. ∎

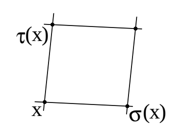
Beispiel. Jede Fastkörper-Ebene ist eine Translationsebene. Die Moulton-Ebene ist keine Translationsebene (vgl. Aufgabe 24).

(5.21) Bemerkung. (1) Der Beweis zeigt, dass die Existenz von Translationen mit Richtung $G \in \mathfrak{G}$ äquivalent zu (Ad) mit "Richtung G" ist (d.h. $G_1, G_2, G_3 \| G$).

(2) Wegen Aufgabe 10(b) (oder (5.14.1) mit (5.1.2)) gibt es in Translationsebenen zu $a, b \in A$ genau ein $\tau \in T$ mit $\tau(a) = b$. Wählt man $o \in A$ fest, so werde für alle $a \in A$ mit $\tau_a \in T$ **die** Translation mit $\tau_a(o) = a$ bezeichnet. Dann ist $\tau : A \to T;\ a \mapsto \tau_a$ eine Bijektion. Man kann mit $\forall a, b \in A : a + b := \tau_a(b)$ eine Addition auf A einführen und $(A, +)$ ist dann eine Gruppe isomorph zu T. Ein Isomorphismus ist τ, d.h. $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b$ (Nachweis durch Anwenden auf o). Tatsächlich ist $(A, +)$ eine kommutative Gruppe, denn

(5.22) *In jeder Translationsebene $(A, \mathfrak{G})$ ist T kommutativ.*

Beweis. Seien $\sigma, \tau \in T$ und $x \in A$.



1. Fall: $x, \sigma(x), \tau(x)$ nicht kollinear. Es gilt $\overline{x,\sigma(x)}\|\overline{\tau(x),\tau\circ\sigma(x)}$ und $\overline{x,\tau(x)}\|\overline{\sigma(x),\sigma\circ\tau(x)}$.

$$\tau\circ\sigma(x) = \overline{\tau(x),\tau\circ\sigma(x)} \cap \overline{\sigma(x),\sigma\circ\tau(x)} = \sigma\circ\tau(x) \implies \tau\circ\sigma = \sigma\circ\tau,$$

denn $\tau\circ\sigma$ und $\sigma\circ\tau$ sind Translationen.

2. Fall: $x, \sigma(x), \tau(x)$ sind kollinear. Wähle $\varrho \in T$ mit $\varrho(x) \notin \overline{x,\sigma(x)} = \overline{x,\tau(x)}$. Es gilt

$$\tau\circ\varrho(x) \in \{\varrho(x)\|\overline{x,\tau(x)}\} \neq \overline{x,\sigma(x)}.$$

Also

$$\sigma\circ(\tau\circ\varrho) = (\tau\circ\varrho)\circ\sigma = \tau\circ(\varrho\circ\sigma) = \tau\circ(\sigma\circ\varrho).$$

Kürzen von ϱ führt auf $\sigma\circ\tau = \tau\circ\sigma$. ∎

(5.23) *Die affine Ebene* $(A, \mathfrak{G})$ *ist desarguessch genau dann, wenn* $\forall a, b, z \in A$, *verschieden und kollinear, eine Dilatation* δ *mit Fixpunkt* z *und* $\delta(a) = b$ *existiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Analog zum Beweis von (5.20).

„$\Longleftarrow$“: Sei a, b, z wie oben. Für $x \in A \setminus \overline{a, b}$ setzen wir $\delta(x) = \overline{z, x} \cap \{b \| \overline{x, a}\}$. Für $x \in \overline{a, b} \setminus \{z\}$ wähle Hilfspunkt $c \in A \setminus \overline{a, b}$, und verfahre wie gehabt. Schließlich sei $\delta(z) = z$. Weiter wie im Beweis von (5.20). Evt. Übung. ∎

(5.24) Bemerkung. (1) Sei $o \in A$ ein fester Punkt. Dann ist $\Delta_o := \{\delta \in \Delta\,;\ \delta(o) = o\}$ eine Untergruppe von Δ. Im Fall $A = \mathrm{AG}(2, K)$ gilt $\Delta_o \cong (K \setminus \{0\}, \cdot\,)$ (Beweis evt. später!). Diesen Umstand kann man nutzen, um $K \setminus \{0\}$ in einer desarguesschen Ebene zu konstruieren. Dabei bekommt man die Gruppeneigenschaft geschenkt.

(2) In ähnlicher Weise kann man $(K, +)$ als Untergruppe von T gewinnen. Es bleibt das Zusammenwirken von $(K, +)$ und Δ_o zu klären, um auch die Distributivgesetze nachweisen zu können. Die Einführung von Koordinaten entspricht dem Nachweis, dass T ein Vektorraum über K ist. Vgl. dazu auch (5.21).

(3) Analog kann man auch nicht desarguessche Ebenen koordinatisieren, etwa Fastkörperebenen. Bei Translationsebenen ist immerhin T noch ein Vektorraum über einem geeigneten Körper.

(4) Die Gültigkeit von Schließungssätzen vom Desargues-Typ ziehen die Existenz gewisser Zentralkollineationen auf der projektiven Ebene nach sich und umgekehrt. Dies mündet in der Klassifikation projektiver Ebenen nach Lenz und Barlotti.

6 Ebenen mit Kongruenz

In diesem Kapitel werden wir metrische Begriffe in die Inzidenzgeometrie einführen. Das gelingt durch die Definition einer „Ebene mit Kongruenz“. Wir werden zunächst nur diese Definition angeben ohne die Theorie zu entwickeln. Anschließend betrachten wir zwei wichtige Beispiele. Um uns dann der axiomatischen Durchführung zu widmen.

Definition. Sei $(E, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum mit (E3) und (I3), der das „Austauschaxiom“ erfüllt. Eine Relation $\equiv$ auf $E \times E$ heißt *Kongruenzrelation*, wenn für alle $a, b, c \in E$ gilt

(K1) $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation

(K2) $(a, b) = (b, a)$ und $(a, a) = (b, b)$

(K3) $(a, b) = (c, c) \implies a = b$.

Für $a, b, c, a', b', c' \in E$ schreiben wir abkürzend

$$(a, b, c) \equiv (a', b', c'), \quad \text{wenn} \quad (a, b) \equiv (a', b'), \quad (b, c) \equiv (b', c') \quad \text{und} \quad (a, c) \equiv (a', c').$$

$(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ heißt *Ebene mit Kongruenz*, wenn folgende Axiome erfüllt sind.

(W1) Für alle $a, b, c \in E$ kollinear und verschieden, und $a', b' \in E$ mit $(a, b) \equiv (a', b')$ existiert genau ein $c' \in \overline{a', b'}$ mit $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$.

(W2) Es seien $a, b, x \in E$ nicht kollinear, $a', b', x' \in E$, $c \in \overline{a, b}$ und $c' \in \overline{a', b'}$ mit $(a, b, x) \equiv (a', b', x')$ und $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$. Dann gilt $(c, x) \equiv (c', x')$.

(W3) Zu $a, b, x \in E$ nicht kollinear gibt es genau ein $x' \in E \backslash \{x\}$ mit $(a, b, x) \equiv (a, b, x')$.

(6.1) Bemerkung. 1. Das Austauschaxiom stellt sicher, dass man einen „vernünftigen“ Dimensionsbegriff zur Verfügung hat und überhaupt von „Ebene“ sprechen kann. Insbesondere impliziert es, dass eine echter „Unterraum“ nur leer, ein Punkt, oder eine Gerade sein kann.

2. Ein Unterraum eines Inzidenzraums $(P, \mathfrak{G})$ ist eine Teilmenge $U \subseteq P$ mit der Eigenschaft: $\quad \forall a, b \in U, a \neq b \implies \overline{a, b} \subseteq U$.

3. Das Axiom (W3) stellt sicher, dass Ebenen mit Kongruenz wirklich *Ebenen* sind.

4. Eine erste, wichtige Folgerung aus den Axiomen wird sein, dass Geradenspiegelungen existieren und die „richtigen“ Eigenschaften haben.

Euklidische Ebenen — Beispiele

Euklidische Ebenen sind affine Ebenen mit Kongruenz. Wir werden zunächst eine Klasse von Beispielen angeben.

Sei E ein kommutativer Körper mit einem involutorischen Automorphismus $\overline{}$. Der Fixkörper sei $K = \{x \in E\,;\ x = \overline{x}\}$. (Dass K wirklich ein Körper ist, ist leicht zu sehen!)

(6.2) Beispiele. 1. $E = \mathbb{C}$ mit dem Komplexkonjugieren führt auf $K = \mathbb{R}$.

2. Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}\,;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ besitzt den involutorischen Automorphismus $\overline{a + b\sqrt{2}} = a - b\sqrt{2}$ mit Fixkörper $\mathbb{Q}$.

3. Über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ hat das Polynom $x^2 - 2$ keine Nullstelle. Für eine „künstliche" Nullstelle α ist $E = \mathbb{Z}_5(\alpha) = \mathbb{Z}_5 + \mathbb{Z}_5\alpha$ ein Körper mit involutorischem Automorphismus $a + b\alpha \mapsto a - b\alpha$.

4. Jeder endliche Körper K mit $2 \neq 0$ besitzt Elemente a, die keine Quadrate sind. Durch „Adjunktion" einer Nullstelle α des Polynoms $x^2 - a$ erhält man einen Körper $E = K(\alpha)$, der einen involutorischen Automorphismus besitzt. Siehe dazu die Übungen.

5. Auch der Körper GF(4) aus (3.14) besitzt einen involutorischen Automorphismus, der durch $\tau \mapsto \tau + 1$ gegeben ist.

Das Paar (E, K) wird auch eine *separable, quadratische Körpererweiterung* genannt. Die Bezeichnung rechtfertigt der folgende, wichtige Satz.

(6.3) Satz. *Sei E ein kommutativer Körper mit einem involutorischen Automorphismus $\overline{}$. Dann gilt*

(1) *$b, x \in E$ sind K-linearabhängig genau dann, wenn $x\overline{b} \in K$.*

(2) *Für alle $y \in E \setminus K$ gilt $E = K + yK$. Der Vektorraum (E, K) ist daher zweidimensional.*

(3) *Anders ausgedrückt: Für jedes $\alpha \in E \setminus K$ gilt $E = K(\alpha)$ und α ist Nullstelle des quadratischen Polynoms $x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$ über K.*

Beweis. (1) OE $b \neq 0$. Dann gilt $x\overline{b} \in K$ genau dann, wenn $xb\overline{b} \in bK$ genau dann, wenn $x \in bK$ denn $b\overline{b} \in K$.

(2) Wegen $E \neq K$ gibt es $y \in E \setminus K$. Für $x \in E$ gilt

$$(y - \overline{y})x = y\overline{x} - \overline{y}x + y(x - \overline{x}) \quad \text{und} \quad \frac{y\overline{x} - \overline{y}x}{y - \overline{y}}\ ,\ \frac{x - \overline{x}}{y - \overline{y}} \in K.$$

(3) Jedes $\alpha \in E$ ist Nullstelle des quadratischen Polynoms $x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$ mit Koeffizienten in K! ■

Definition. Für $a, b, c, d \in E$ setze

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff (a-b)\overline{(a-b)} = (c-d)\overline{(c-d)}.$$

Mit $(E, \mathfrak{G}) = \mathrm{AG}(E, K)$ heißt $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ die *euklidische Ableitung* von $(E, \overline{})$, bzw. von (E, K).

Man zeigt leicht

(6.4) $\equiv$ *ist eine Kongruenzrelation auf* $\mathrm{AG}(E, K)$. ■

(6.5) Bemerkung. 1. Wir betrachten den wichtigen Spezialfall $E = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$. Hier gilt $(a-b)\overline{(a-b)} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. In der Tat rechnet man leicht nach, dass

$$d(a, b) = \sqrt{(a-b)\overline{(a-b)}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

der übliche Abstand der komplexen Zahlen a, b ist, sodass $(a, b) \equiv (c, d)$ genau dann, wenn die Abstände zwischen a, b und c, d gleich sind, d. h. $d(a, b) = d(c, d)$.

2. Allgemein gilt: $Q : E \to K;\ x \mapsto x\bar{x}$ ist eine quadratische Form, d. h. für alle $x, y \in E, \lambda \in K$ gilt

$$Q(x\lambda) = Q(x)\lambda^2 \quad \text{und} \quad B_Q(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

ist eine symmetrische Bilinearform. In der Tat ist $B_Q(x, y) = x\bar{y} + \bar{x}y$.

Weiter gilt $Q(x) = 0 \iff x = 0$, d. h. Q ist *nullteilig*.

3. Ist $2 \neq 0$, so gilt außerdem $Q(x) = \frac{1}{2}B_Q(x, x)$, d. h. Q und B_Q bestimmen sich gegenseitig.

4. Die Formulierung mit quadratischen Formen erlaubt eine einfache Verallgemeinerung in den Raum.

Mit der oben gemachten Beobachtung können wir zeigen

(6.6) Satz. *Sei E ein kommutativer Körper mit einem involutorischen Automorphismus $\overline{}$ und Fixkörper K. Dann ist die euklidische Ableitung $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebene mit Kongruenz.*

Beweis. (W1) Es seien $a, b, c \in E$ kollinear, d. h. es existiert $\lambda \in K$ mit $c = a + (b-a)\lambda$. Für die Punkte $a', b' \in E$ gelte $(a,b) \equiv (a',b')$, also $(a-b)\overline{(a-b)} = (a'-b')\overline{(a'-b')}$. Sei nun $\mu \in K$ und $c' = a' + (b'-a')\mu$. Wir werden zeigen, dass $\mu = \lambda$ auf das gesuchte c' führt, und dass die Kongurenzbedingung aus (W1) μ eindeutig festlegt.

Die folgende Rechnung zeigt $(a,c) \equiv (a',c') \iff \lambda^2 = \mu^2$:

$$\begin{aligned}(a-c)\overline{(a-c)} &= (a-b)\lambda\overline{(a-b)\lambda} = (a-b)\overline{(a-b)}\,\lambda^2 \\ (a'-c')\overline{(a'-c')} &= (a'-b')\mu\overline{(a'-b')\mu} = (a'-b')\overline{(a'-b')}\,\mu^2\end{aligned}$$

Im Fall $2 = 0$ ist das äquivalent zu $\lambda = \mu$.

Wegen $c - b = (a-b)(1-\lambda)$ und $c' - b' = (a'-b')(1-\mu)$ ist $(c,b) \equiv (c',b')$ äquivalent zu

$$(1-\lambda)^2 = (1-\mu)^2 \iff 1 + \lambda^2 - 2\lambda = 1 + \mu^2 - 2\mu$$

Das ist genau für $\lambda = \mu$ erfüllt.

(W2) Der Beweis von (W1) zeigt für

$$\lambda \in K : c = a + (b-a)\lambda \iff c' = a' + (b'-a')\lambda.$$

Um den Beweis durchsichtiger zu machen, benutzen wir die in (6.5.2) eingeführten Bezeichnungen. Es gilt

$$Q(a-x) = Q(a'-x') \quad \text{und} \quad Q(b-x) = Q(b'-x').$$

Es folgt wegen $c - x = (a-x)(1-\lambda) + (b-x)\lambda$

$$Q(c-x) = Q(a-x)(1-\lambda)^2 + Q(b-x)\lambda^2 + B_Q(a-x, b-x)\,(1-\lambda)\lambda.$$

Weil analoge Aussagen für die gestrichenen Größen gelten, ist die zu zeigende Aussage also äquivalent zu $B_Q(a-x, b-x) = B_Q(a'-x', b'-x')$. Nun gilt

$$\begin{aligned}-B_Q(a-x, b-x) &= B_Q(a-x, x-b) = Q(a-x+x-b) - Q(a-x) - Q(b-x) \\ &= Q(a-b) - Q(a-x) - Q(b-x)\end{aligned}$$

und entsprechend für die gestrichenen Größen. Da aber die rechten Seiten nach Voraussetzung gleich sind, folgt die Behauptung.

(W3) Wegen der offensichtlichen Translationsinvarianz von „$\equiv$“, kann oE $a = 0$ angenommen werden. Wir suchen also zu $x \notin bK$ ein $x' \in E \setminus \{x\}$ mit

$$x\overline{x} = x'\overline{x'} \quad \text{und} \quad (x-b)\overline{(x-b)} = (x'-b)\overline{(x'-b)}.$$

Und wir müssen die Eindeutigkeit zeigen.

Existenz: Sei $x' := b(\overline{b})^{-1}\overline{x}$. Wäre $x = x'$, so wäre $x\overline{b} = \overline{x}b = \overline{\overline{x}b}$ also $x\overline{b} \in K$ und wegen (6.3.1) wären x, b linear abhängig, im Widerspruch zu $x \notin bK$. Das zeigt $x' \neq x$.

Es gilt $x'\overline{x'} = b(\overline{b})^{-1}\overline{x} \cdot \overline{b}b^{-1}x = x\overline{x}$, die erste Gleichung.

$$\begin{aligned}(x'-b)\overline{(x'-b)} &= \left(\frac{b}{\overline{b}}\overline{x}-b\right)\overline{\left(\frac{b}{\overline{b}}\overline{x}-b\right)} = (b\overline{b})^{-1}(b\overline{x}-b\overline{b})(\overline{b}x-b\overline{b}) \\ &= (x-b)\overline{(x-b)}.\end{aligned}$$

Also hat x' die gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit: Sei $y \in E \setminus \{x\}$ mit $x\overline{x} = y\overline{y}$ und $(x-b)\overline{(x-b)} = (y-b)\overline{(y-b)}$. Dann gilt $x\overline{b} + \overline{x}b = y\overline{b} + \overline{y}b$. Multiplizieren mit $y \neq 0$ führt auf

$$0 = y^2\overline{b} - (x\overline{b} + \overline{x}b)y + y\overline{y}b = \overline{b}y^2 - (x\overline{b} + \overline{x}b)y + x\overline{x}b.$$

Diese quadratische Gleichung in y hat im Körper E höchstens zwei Lösungen, eine davon ist x. Somit ist x' die andere Lösung und ist daher eindeutig bestimmt. ■

Bemerkung. Im Fall $|E| = 4$ (Minimalmodell!) ist die Aussage des Satzes nicht ganz korrekt, denn (I3) gilt nicht. Alle anderen Ausagen sind aber richtig.

Definition. Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebene mit Kongruenz. Eine surjektive Abbildung $\varphi : E \to E$ heißt *Bewegung*, wenn für alle $x, y \in E$ gilt $(x, y) \equiv (\varphi(x), \varphi(y))$.

Eine wichtige Beobachtung ist

(6.7) *Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebene mit Kongruenz.*

(1) *Sind $a, b, c \in E$ kollinear und $a', b', c' \in E$ mit $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$, dann sind a', b', c' kollinear.*

(2) *Jede Bewegung φ von E ist eine Kollineation.*

(3) *Die Menge $\mathcal{B}(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ der Bewegungen von E ist eine Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(E, \mathfrak{G})$.

Beweis. (1) Im Fall $|\{a, b, c\}| < 3$ folgt mit (K3) auch $|\{a', b', c'\}| < 3$ und die Ausage ist trivial.

Andernfalls existiert $d' \in \overline{a', b'}$ mit $(a, b, c) = (a', b', d')$ nach (W1). Wäre $c' \notin \overline{a', b'}$, so folgte mit (W2) wegen $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$ auch $(d', c') \equiv (c, c)$, also $d' = c'$ nach (K3).

(2) Wegen (K3) ist φ injektiv, also bijektiv. Wegen (1) werden kollineare Punkte auf kollineare Punkte abgebildet. Da auch φ^{-1} eine Bewegung ist, gilt das auch für φ^{-1} und φ ist eine Kollineation.

(3) ist wegen (2) klar. ■

Bemerkung. Bewegungen sind also die Automorphismen von Ebenen mit Kongruenz. Die Forderung, dass φ eine Kollineation ist, fehlt in der Definition nur deshalb, weil man es beweisen kann.

(6.8) Beispiele. 1. Offenbar sind Translationen $E \to E; x \mapsto x + a$ für alle $a \in E$ Bewegungen.

2. Die Abbildung $\sigma : E \to E; x \mapsto a + b(\overline{b})^{-1}(\overline{x} - \overline{a})$ mit $a, b \in E, b \neq 0$, heißt *Spiegelung* an der Geraden $a + bK$. In der Tat gilt $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ und (mit (6.3.1))

$$\sigma(x) = x \iff b\overline{(x-a)} = \overline{b}(x-a) \iff x - a \in bK \iff x \in a + bK.$$

Weiter gilt $\sigma(x) - \sigma(y) = b(\overline{b})^{-1}(\overline{x} - \overline{y})$. Es folgt

$$\big(\sigma(x) - \sigma(y)\big)\,\overline{\big(\sigma(x) - \sigma(y)\big)} = b(\overline{b})^{-1}(\overline{x} - \overline{y})\,\overline{b(\overline{b})^{-1}}(x - y) = (x-y)\overline{(x-y)}.$$

Daher ist σ eine Bewegung.

3. Auch die Abbildung $\delta : E \to E; x \mapsto b(\overline{b})^{-1}x$ ist für $b \in E \setminus \{0\}$ eine Bewegung. Im Fall $b \notin K$ hat δ genau den Fixpunkt 0. Wir nennen δ eine *Drehung*.

Wir nehmen jetzt an, dass der Körper E die Eigenschaft $2 \neq 0$ hat und von der Form $E = K(\alpha)$ mit $\alpha^2 \in K$ ist (vgl. auch Aufgabe 41). Wir wählen die Basis $1, \alpha$ des Vektorraums (E, K) und suchen Darstellungen von Bewegungen mit Hilfe von Matrizen. Mit den Bezeichnungen aus (6.5.2) gilt

$$Q(x) = (x_1 + x_2\alpha)(x_1 - x_2\alpha) = x_1^2 - x_2^2\alpha^2 = x^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} x =: x^{\mathrm{T}} F x,$$

wobei F die Q bestimmende (symmetrische) Matrix (über K) ist.

Wann ist $\varphi : E \to E; x \mapsto Mx + t$ mit $M \in \mathrm{GL}(2, K)$, $t \in E$, eine Bewegung?

Weil Translationen Bewegungen sind, muss insbesondere $Q(x) = Q(Mx)$ gelten. Das bedeutet

$$x^{\mathrm{T}} F x = (Mx)^{\mathrm{T}} F M x = x^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} F M x \iff F = M^{\mathrm{T}} F M.$$

Das sieht man indem man für x die Basisvektoren einsetzt. Man erkennt leicht, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Mit diesen Bezeichnungen gilt

(6.9) *φ ist genau dann eine Bewegung, wenn $F = M^{\mathrm{T}} F M$.* ■

Der Spezialfall $E = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$ ist besonderer Erwähnung wert.

(6.10) *In der reellen Anschauungsebene $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{G}, \equiv)$ sind alle Bewegungen gegeben durch $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $x \mapsto Mx + t$. Dabei ist $t \in \mathbb{R}^2$, und M ist eine orthogonale 2×2-Matrix, d. h. $M^{\mathrm{T}} M = I_2$. Das ist gleichwertig zu $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$.*

Beweis. Jede Bewegung ist eine Kollineation der affinen Ebene $\mathrm{AG}(2,\mathbb{R})$ (siehe (6.7)), also nach dem Fundamentalsatz von der Form $x \mapsto \sigma(x) + t$ mit $t \in \mathbb{R}^2$ und einer semilinearen Bijektion von $\mathbb{R}^2$. Da aber $\mathbb{R}$ die Identität als einzigen Automorphismus besitzt, ist σ sogar linear, kann also bezüglich jeder Basis mit einer Matrix beschrieben werden.

Wir wählen die Basis $1, i$ für $\mathbb{C}$ und erkennen, dass $F = I_2$ die Einheitsmatrix ist. Nun folgt die Behauptung aus (6.9). ∎

(6.11) Bemerkung. 1. Auch wenn K nichttriviale Automorphismen besitzt, gibt es keine „semilinearen“ Bewegungen, d. h. alle Bewegungen können — wie oben beschrieben — mit Matrizen dargestellt werden.

2. Man kann also statt die Körpererweiterung (E, K) zu betrachten, auch $\mathrm{AG}(2, K)$ und eine geeignete Matrix F zur Beschreibung von euklidischen Ebenen benutzen. Dieser Weg wird meist in der Linearen Algebra eingeschlagen.

Das Kleinsche Modell einer hyperbolischen Ebene

Hyperbolischen Ebenen sind ebenfalls Ebenen mit Kongruenz, die aber nicht affin sind. Wir geben hier nur „das“ Beispiel über den reellen Zahlen an, in einer Beschreibung, die auf Felix Klein[9] zurück geht.

Für den kommutativen Körper K betrachte vier kollineare Punkte aK, bK, cK, dK in $\mathrm{PG}(2, K)$. Durch Wahl der Vertreter $a, b, c, d \in K^3$ können wir im Fall $aK \neq bK, cK$ sowie $bK \neq cK, dK$ erreichen, dass gilt

$$c = a + b \quad \text{und} \quad d = a + b\delta \quad \text{für ein eindeutig(!) bestimmtes } \delta \in K.$$

Wir nennen $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) := \delta$ das *Doppelverhältnis* der gegebenen Punkte. Außerdem setzen wir $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, bK) := \infty$ und $\mathrm{DV}(aK, aK, cK, dK) := 1$. Weitere spezielle Werte ergeben sich durch die Konvention $0^{-1} = \infty$ und $\infty^{-1} = 0$ und

(6.12) **(1)** $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, cK) = 1$.

(2) $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) = \mathrm{DV}(cK, dK, aK, bK)$.

(3) $\mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK) = \mathrm{DV}(bK, aK, cK, dK)^{-1} = \mathrm{DV}(aK, bK, dK, cK)^{-1}$.

Beweis. (1) ist offenbar, (3) folgt sofort aus der Darstellung $d\delta^{-1} = b + a\delta^{-1}$ und (2).

(2) Aus $c = a + b$ und $d = a + b\delta$ folgt

$$a(1 - \delta^{-1}) = c - d\delta^{-1} \quad \text{und} \quad b(1 - \delta) = c - d.$$

Mit $a' = a(1-\delta^{-1})$, $b' = b(1-\delta)$, $c' = c$, $d' = d(-\delta^{-1})$ folgt $a' = c' + d'$ und $b' = c' + d'\delta$. Das ist die Behauptung. ∎

[9] Felix Klein 1849 - 1925

Beispiel. In $\mathrm{PG}(2,K)$ betrachten wir die Gerade G, die durch $x_2 = 0$ definiert ist. Die Punkte haben die Form $(1:x:0)$ und können mit x identifiziert werden. Den Punkt $(0:1:0) \in G$ schreiben wir ∞. Für $a,b,c,d \in K$ verschieden gilt

$$(1,c) = (1,a)(1-\lambda) + (1,b)\lambda \quad \text{mit } \lambda = \frac{c-a}{b-a} \text{ und } \quad (1,d)\mu = (1,a)(1-\lambda) + (1,b)\lambda\delta.$$

Dabei wurde die 2-Koordinate weggelassen. Es folgt

$$\mu = (1-\lambda) + \lambda\delta \quad \text{und} \quad d\mu = a(1-\lambda) + b\lambda\delta$$

Das ergibt

$$d\big((1-\lambda)+\lambda\delta\big) = a(1-\lambda) + b\lambda\delta \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{(a-d)(1-\lambda)}{(d-b)\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta = \frac{(a-d)(1-\frac{c-a}{b-a})}{(d-b)\frac{c-a}{b-a}} = \frac{(a-d)(b-a-(c-a))}{(d-b)(c-a)} = \frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)} = \frac{\frac{a-d}{a-c}}{\frac{b-d}{b-c}}.$$

Daher der Name „Doppelverhältnis“. Diese Formel gilt auch wenn der Punkt ∞ vorkommt, indem man die üblichen Konventionen benutzt. Auch die Aussagen von (6.12) sind leicht zu sehen.

Bemerkung. So wird das Doppelverhältnis z. B. in der Funktionentheorie eingeführt. Es gibt eine Reihe weiterer äquivalenter Zugänge. Dabei ist die Definition nicht einheitlich. Häufig wird statt δ der Wert δ^{-1} verwendet. Alle abweichenden Definitionen in der Literatur ergeben sich durch Permutation der Einträge in unserem DV.

Eine wichtige Eigenschaft ist

(6.13) *Sei K ein kommutativer Körper.*

(1) *Jeder lineare Automorphismus von $\mathrm{PG}(2,K)$ läßt DV invariant.*

Genauer: Sei M eine invertierbar 3×3-Matrix, dann gilt

$$\mathrm{DV}(MaK, MbK, McK, MdK) = \mathrm{DV}(aK, bK, cK, dK).$$

(2) *Jede Zentralkollineation ist linear, d. h. sie wird von einer linearen Abbildung induziert und läßt daher DV invariant.*

Beweis. (1) ist offenbar.

(2) Sei φ eine Zentralkollineation mit Achse L und Zentrum z. Wähle eine Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ von L und ergänze Sie mit $\mathbf{b}_0$ zu einer Basis von K^3. Im Fall $z \notin L$ wähle $\mathbf{b}_0 \in z$, d. h. $z = \mathbf{b}_0 K$. In der affinen Ebene $(A, \mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,K) \setminus L$ ist $\alpha = \varphi|_A$ eine Translation

oder eine Streckung mit Zentrum 0. Somit gilt $\alpha(x) = x + t$ oder $\alpha(x) = x\lambda$. Daher gilt bezüglich der Basis $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ (vgl. (5.12))

$$\varphi(x) = Mx \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Natürlich ist Linearität unabhängig von der Wahl einer Basis. ■

Im Folgenden spezialisieren wir den Körper zu $\mathbb{R}$ und denken wir uns stets $\mathrm{AG}(2,\mathbb{R})$ kanonisch in $(P,\mathfrak{G}) = \mathrm{PG}(2,\mathbb{R})$ eingebettet, so dass das Doppelverhältnis auch für kollineare Punkte aus $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Sei $(H,\mathfrak{G}_H)$ der Inzidenzraum aus (1.1.11), d. h. es sei

$$K := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\ x_1^2 + x_2^2 = 1\right\} \quad \text{und} \quad H := \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\ x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$$

der Einheitskreis, bzw. dessen Inneres. Weiter sei

$$\mathfrak{G}_H := \{G \cap H\,;\ G \in \mathfrak{G} \text{ mit } G \cap H \neq \varnothing\},$$

die Geradenmenge besteht also aus den Sekanten von K. Insbesondere können wir Konstruktionen auch in $\mathbb{R}^2$ durchführen.

Die Kongruenz definieren wir wie folgt. Seien $a,b \in H$ und seien $u,v \in \overline{a,b}^{\text{aff}} \cap K$ die beiden Schnittpunkte der Verbindungsgerade von a,b in $\mathbb{R}^2$ mit K. Entsprechend seien u',v' zu $a',b' \in H$ erklärt. Wir setzen

$$\begin{aligned}(a,b) \equiv (a',b') \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{DV}(u,v,a,b) & = & \mathrm{DV}(u',v',a',b') & \text{oder} \\ \mathrm{DV}(u,v,a,b) & = & \mathrm{DV}(u',v',a',b')^{-1} & \end{array}\right\} \\ &\Longleftrightarrow \quad |\ln \mathrm{DV}(u,v,a,b)| = |\ln \mathrm{DV}(u',v',a',b')|\,.\end{aligned}$$

Mit (6.12.3) erkennt man, dass „$\equiv$“ wohldefiniert ist und

(6.14) *„$\equiv$“ ist eine Kongruenzrelation auf $(H,\mathfrak{G}_H)$.*

Beweis. (K1) ist klar, und (K2) folgt direkt aus (6.12.3).

Weil u,v,a verschieden sind, gilt $\mathrm{DV}(u,v,a,b) = 1 \iff a = b$. Das zeigt (K3). ■

Definition. Das Tripel $(H,\mathfrak{G}_H,\equiv)$ heißt *Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene.*

Wegen (6.13) lassen Zentralkollineationen von P, die K festhalten die Kongruenzrelation invariant, induzieren also Bewegungen auf H. Wir betrachten nur einen Fall. Für eine Sekante $L \in \mathfrak{G}$ von K und $u,v \in L \cap K$ sei p der Schnittpunkt der Tangenten an

K in den Punkten u, v. Dieser Punkt p heißt *Pol* zur *Polaren* L. Umgekehrt besitzt auch jeder Punkt außerhalb von K eine Polare, die Sekante von K ist.

Sei nun L Achse einer Zentralkollineation $\varphi \neq \mathrm{id}$, die K festhält. Dann muss φ die beiden Tangenten durch u und v festlassen (da u, v festbleiben, kann das Bild keinen weiteren Schnittpunkt mit K haben). Daher ist der Pol p das Zentrum. Sei nun G eine Sekante von K, die p enthält. Für die beiden Schnittpunkte $s, t \in G \cap K$ gilt $\varphi(s) = t$ und $\varphi(t) = s$. Wegen (5.14.2) muss $\varphi^2 = \mathrm{id}$ gelten — φ ist also eine Involution.

Zu fest gewähltem G existiert auch genau eine solche Zentralkollineation. Daher definieren wir

Definition. Diese Involution wird *Polarenspiegelung* an L genannt und $\tilde{L}$ geschrieben. Sie ist durch L eindeutig festgelegt.

(6.15) *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

(1) $\tilde{L}(K) = K$ *und* $\tilde{L}$ *ist involutorische Bewegung von* $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$.

(2) $\forall x \in P \setminus L \cup \{p\} : \mathrm{DV}(p, \overline{p,x} \cap L, x, \tilde{L}(x)) = -1$.

Beweis. (1) Die erste Tatsache erfodert Kenntnisse über Kegelschnitte in projektiven Ebenen, die wir nicht zur Verfügung haben. Ein anderer Weg ist eine längliche, komplizierte Rechnung.

Die anderen Eigenschaften von $\tilde{L}$ wurden oben gezeigt.

(2) Nach (6.13.2) und (6.12.3) gilt

$$\delta := \mathrm{DV}(p, \overline{p,x} \cap L, x, \tilde{L}(x)) = \mathrm{DV}(p, \overline{p,x} \cap L, \tilde{L}(x), x) = \delta^{-1},$$

also $\delta^2 = 1$. Wegen $\tilde{L}(x) \neq x$ gilt $\delta \neq 1$, und die Behauptung folgt. ∎

(6.16) Bemerkung. 1. Statt $\tilde{L}$ müsste man genauer die Restriktion $\tilde{L}|_H : H \to H$ betrachten. Diese Abbildung kann als Geradenspiegelung von $(H, \mathfrak{G}_H, \equiv)$ aufgefasst wegen.

Wir sprechen daher auch von *hyperbolischen Geradenspiegelungen.*

2. Die obige Konstruktion zeigt wie jedem Punkt p außerhalb von K eine Gerade $\pi(p)$ (eine Sekante von K) zugeordnet wird. Tatsächlich kann π auf ganz P fortgesetzt werden. Dabei ist für Punkte $p \in K$ das Bild $\pi(p)$ die Tangente an K in p und Punkte aus H werden auf Passanten geworfen.

3. Die Abbildung $\pi : P \to \mathfrak{G}$ ist eine Kollineation von $\mathrm{PG}(2, \mathbb{R})$ auf den Dualraum mit $\pi \circ \pi = \mathrm{id}$. Eine solche Abbildung wird *Polarität* genannt. (Das erlaubt eine Konstruktion für Punkte in H !)

4. Aus (5.14) kann man ablesen, wie zu jedem Punkt von H der Bildpunkt konstruiert werden kann. (Das wird in der Vorlesung ausgeführt.)
5. Punkte mit DV $= -1$ nennt man auch in *harmonischer Lage*.
6. Das Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene $(H, \mathfrak{G}, \equiv)$ ist eine Ebene mit Kongruenz. Dazu wären die Axiome (W1), (W2), (W3) zu zeigen.

Axiomatik

Wir betrachten jetzt eine abstrakte Ebene mit Kongruenz $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$, wie sie am Anfang dieses Paragraphen definiert wurde. Insbesondere gelten die Axiome (W1), (W2), (W3).

Unser erstes Ziel ist es die Existenz von Geradenspiegelungen zu zeigen und Ihre wichtigsten Eigenschaften herzuleiten.

Definition. Eine Teilmenge $U \subseteq P$ eines Inzidenzraums $(P, \mathfrak{G})$ heißt *Unterraum*, wenn gilt: $\quad \forall a, b \in U, a \neq b \implies \overline{a,b} \subseteq U$.

Wir werden annehmen, dass E nur folgende Unterräume besitzt: die leere Menge, die einelementigen Mengen (Punkte!), jede Gerade, und E. Vergleiche dazu (6.1).

(6.17) *Seien $a, b, x \in E$ nicht kollinear und $x' \in E \setminus \{x\}$ mit $(a, b, x) \equiv (a, b, x')$. Dann gilt $\{c \in E\,;\ (x, c) \equiv (x', c)\} = \overline{a,b}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $U := \{c \in E\,;\ (x, c) \equiv (x', c)\}$ eine Unterraum ist. Seien $s, t \in U$ und $u \in \overline{s,t}$, dann gilt $(s, t, u) \equiv (s, t, u)$ und $(s, t, x) \equiv (s, t, x')$. Mit (W2) folgt $u \in U$, also $\overline{s,t} \subset U$. Wegen $a, b \in U$ gilt $\overline{a,b} \subseteq U$. Da $x \notin U$ gilt $U \subsetneq E$.

Mit der obenstehenden Bemerkung ist nur $U = \overline{a,b}$ möglich. ■

(6.18) *Für $L \in \mathfrak{G}$ und $x \in E \setminus L$ gibt es genau ein $x' \in E \setminus \{x\}$ mit $(c, x) \equiv (c, x')$ für alle $c \in L$.*

Beweis. Seien $a, b \in L$ verschieden, dann existiert genau ein $x' \in L \setminus \{x\}$ mit $(a, b, x) \equiv (a, b, x')$ nach (W3). Für $c \in \overline{a,b}$ folgt mit (W2) $(c, x) \equiv (c, x')$. ■

Wir schreiben $x^L = x'$. Wegen des Lemmas ist das wohldefiniert.

Definition. Die Abbildung

$$\widetilde{L} : E \to E\,;\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in L \\ x^L & \text{für } x \in E \setminus L \end{cases}$$

heißt *Geradenspiegelung*.

(6.19) *Für alle $L \in \mathfrak{G}$ ist $\widetilde{L}$ eine involutorische Bewegung, die genau die Punkte aus L festlässt.*

Beweis. Nach Definition gilt $\forall x \in L : \widetilde{L}(x) = x$ und wegen (W3) auch $\widetilde{L}(\widetilde{L}(x)) = x$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{L}$ eine Bewegung ist, braucht man Aussagen zur Hülle in Austauschräumen wie sie in § **??** behandelt werden. Wir führen hier den Beweis nur für affine Ebenen $(E, \mathfrak{G})$. Seien $x, y \in E$ und oE $x \neq y$.

1. Fall: $\exists z = \overline{x, y} \cap L$. Nach (W1) existiert $x' \in \overline{z, \widetilde{L}(y)}$ mit $(y, z, x) \equiv (\widetilde{L}(y), z, x')$. Für $a \in L \setminus \{z\}$ gilt $(y, z, a) \equiv (\widetilde{L}(y), z, a)$ also mit (W2) auch $(x, a) \equiv (x', a)$. Nach Konstruktion gilt $(z, x) \equiv (z, x')$ also $x' = \widetilde{L}(x)$ und damit $(x, y) \equiv (\widetilde{L}(x), \widetilde{L}(y))$.

2. Fall: $\exists z = \overline{\widetilde{L}(x), \widetilde{L}(y)} \cap L$. Wie der 1. Fall mit $x' \in \overline{z, y}$.

3. Fall: $\overline{x, y} \| L$ und $\overline{\widetilde{L}(x), \widetilde{L}(y)} \| L$. Sei $z \in L$ und $w \in \overline{z, y} \setminus \{z, y\}$. Mit dem 1. Fall gilt dann

$$(z, w, y) \equiv (z, \widetilde{L}(w), \widetilde{L}(y)) \quad \text{und} \quad (z, w, x) \equiv (z, \widetilde{L}(w), \widetilde{L}(x)), \quad \text{da} \quad \overline{x, w} \cap L \neq \varnothing.$$

Daraus folgt $(x, y) \equiv (\widetilde{L}(x), \widetilde{L}(y))$ mit (W2). ∎

Zur Abkürzung schreiben wir $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E, \mathfrak{G}, \equiv)$. Es gilt dann $\widetilde{L} \in \mathcal{B}$.

(6.20) *Sei $\varphi \in \mathcal{B}$.*

(1) $\mathrm{Fix}\varphi := \{x \in E\,;\ \varphi(x) = x\}$ *ist eine Unterraum von E.*

(2) *Existieren $a, b \in \mathrm{Fix}\varphi$, $a \neq b$, dann gilt $\varphi = \widetilde{\overline{a, b}}$ oder $\varphi = \mathrm{id}$.*

(3) *Hat φ drei nicht kollineare Fixpunkte, dann gilt $\varphi = \mathrm{id}$.*

Beweis. (1) Seien $a, b \in \mathrm{Fix}\varphi$, $a \neq b$, und $c \in \overline{a, b}$. Dann gilt $\varphi(c) \in \overline{a, b}$ wegen (6.7) und $(a, b, c) \equiv (a, b, \varphi(c))$. Nach (W1) hat man also $\varphi(c) = c$ und $\overline{a, b} \subseteq \mathrm{Fix}\varphi$.

(2) Sei $\varphi \neq \mathrm{id}$, dann gilt $\mathrm{Fix}\varphi \neq E$ und $L := \overline{a, b} \subseteq \mathrm{Fix}\varphi$. Daher muss gelten $\mathrm{Fix}\varphi = L$. Für $x \in E \setminus L$ gilt $(a, b, x) \equiv (a, b, \varphi(x))$. Mit (W3) ist also $\varphi(x) = \widetilde{L}(x)$.

Insgesamt folgt $\varphi = \widetilde{L}$.

(3) Ein Unterraum, der drei nicht kollineare Punkte enthält muss gleich E sein. ∎

(6.21) *Für $G, H \in \mathfrak{G}$ und $\varphi \in \mathcal{B}$ gilt*

(1) $\varphi \widetilde{G} \varphi^{-1} = \widetilde{\varphi(G)}$

(2) $\widetilde{G}(H) = H \iff \widetilde{G}\widetilde{H} = \widetilde{H}\widetilde{G} \iff \widetilde{H}(G) = G$.

Im Fall $G \neq H$ ist das genau dann der Fall, wenn $\widetilde{G}\widetilde{H}$ involutorisch ist.

Beweis. (1) Offenbar (und ganz allgemein!) gilt

$$\operatorname{Fix}\left(\varphi\widetilde{G}\varphi^{-1}\right) = \varphi\left(\operatorname{Fix}\widetilde{G}\right) \stackrel{!}{=} \varphi(G).$$

Mit (6.20.2) folgt sofort die Behauptung.

(2) Bei allen Rechnungen beachte man $\widetilde{G}^{-1} = \widetilde{G}$ für alle Geradenspiegelungen. Der Fall $G = H$ ist trivial, also können wir ab sofort $G \neq H$ annehmen. Dann ist insbesondere $\widetilde{G}\widetilde{H} \neq \mathrm{id}$, und es gilt offenbar

$$\widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{G} = \widetilde{H} \iff \widetilde{G}\widetilde{H} = \widetilde{H}\widetilde{G} \iff \widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{G}\widetilde{H} = \mathrm{id} \iff \widetilde{G}\widetilde{H} \quad \text{involutorisch.}$$

Aus $\widetilde{G}(H) = H$ und (1) ergibt sich $\widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{G} = \widetilde{\widetilde{G}(H)} = \widetilde{H}$. Und aus $\widetilde{H} = \widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{G} = \widetilde{\widetilde{G}(H)}$ folgt umgekehrt $\widetilde{G}(H) = H$.

Wegen Symmetrie kann auch die Beziehung $\widetilde{H}(G) = G$ in die Äquivalenzkette eingebaut werden. ∎

Definition. Man sagt zwei Geraden $G, H \in \mathfrak{G}$ stehen *senkrecht* oder *orthogonal*, wenn $\widetilde{G}\widetilde{H}$ involutorisch ist und schreibt $G \perp H$. Man nennt G auch *Lot* auf H (und umgekehrt).

G und H sind also genau dann orthogonal, wenn $G \neq H$ und die vier äquivalenten Bedingungen aus (6.21.2) erfüllt sind. Insbesondere ist Orthogonalität eine symmetrische, antireflexive Relation auf $\mathfrak{G}$.

Definition. Seien $x, y \in E$ und $G \in \mathfrak{G}$. Gilt $\widetilde{G}(x) = y$, so heißt G *Mittellot* (oder auch *Mittelsenkrechte*) von x und y.

Im Fall $x \neq y$ gilt offenbar $G \perp \overline{x, y}$.

Wir benutzen die in § 3 eingeführte Bezeichnung $\overline{x} := \{G \in \mathfrak{G}\,;\ x \in G\}$ für $x \in E$.

Zur Existenz von Loten und Mittelloten gibt Auskunft

(6.22) *Seien $a, b \in E$ mit $a \neq b$.*

(1) *Für $G \in \mathfrak{G}$ mit $a \notin G$ existiert genau ein Lot $H \in \overline{a}$, nämlich $H = \overline{a, \widetilde{G}(a)}$.*

(2) *Es gibt höchsten ein Mittellot L von a, b.*

Im Fall der Existenz gilt $L = \{x \in E\,;\ (a, x) \equiv (b, x)\}$.

(3) *Existiert* $c \in E \setminus \overline{a,b}$ *mit* $(a,c) \equiv (b,c)$, *so existiert ein Mittellot von* a *und* b.

Beweis. (1) Offenbar gilt $\widetilde{G}\left(\overline{a,\widetilde{G}(a)}\right) = \overline{a,\widetilde{G}(a)}$, also $G \perp \overline{a,\widetilde{G}(a)}$. Für $H \in \overline{a}$ mit $H \perp G$ gilt $\widetilde{G}(H) = H$, also $\widetilde{G}(a) \in H$. Daher gilt $H = \overline{a,\widetilde{G}(a)}$.

(2) Für ein $L \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{L}(a) = b$ ist (6.17) anwendbar und zeigt die zweite Behauptung. Die Eindeutigkeit ist dann trivial.

(3) Fälle gemäß (1) eine Lot von c auf $\overline{a,b}$. ∎

(6.23) Bemerkung. 1. Die erste Aussage zeigt, dass man immer eindeutig von einem gegebene Punkt aus ein *Lot fällen* kann.

2. Um die Existenz von Mittelloten allgemein zu beweisen, braucht man stärkere Voraussetzungen.

3. Auch mit der Frage, wann man in einem Punkt ein *Lot errichten* kann, werden wir uns später beschäftigen.

Im Fall der Existenz (und Eindeutigkeit) schreiben wir $\{a \perp G\}$ für ein Lot durch a auf G. Nur im Fall $a \notin G$ sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert. Zum Fall $a \in G$ siehe Aufgabe 52.

(6.24) *Seien* $G, H, L \in \mathfrak{G}$.

(1) *Sei* $a \in E$ *mit* $\widetilde{G}\widetilde{H}(a) = a$, *dann gilt* $a = G \cap H$ *oder* $G = H$.

(2) $\widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{L} \neq \mathrm{id}$.

(3) *Für* $\varphi \in \mathcal{B}$ *gilt* $G \perp H \implies \varphi(G) \perp \varphi(H)$.

Beweis. (1) Es gilt $\widetilde{G}(a) = \widetilde{H}(a) =: a'$. Im Fall $a' \neq a$ ist $G = H$ das nach (6.22.2) einzige Mittellot von a und a'.

Im Fall $a = a'$ ist a Fixpunkt von $\widetilde{G}$ und $\widetilde{H}$, also $a \in G \cap H$.

(2) Anngenommen $\widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{L} = \mathrm{id}$, dann gilt $\widetilde{G}\widetilde{H} = \widetilde{L}$ und L ist Fixpunktgerade von $\widetilde{G}\widetilde{H}$. Nach (1) ist das nur für $G = H$ möglich. Dann folgt aber $\widetilde{L} = \mathrm{id}$, ein Widerspruch.

(3) $\widetilde{G}\widetilde{H}$ ist genau dann involutorisch, wenn $\varphi\widetilde{G}\widetilde{H}\varphi^{-1}$ involutorisch ist. Es gilt aber mit (6.21.1)

$$\varphi\widetilde{G}\widetilde{H}\varphi^{-1} = \varphi\widetilde{G}\varphi^{-1}\,\varphi\widetilde{H}\varphi^{-1} = \widetilde{\varphi(G)}\,\widetilde{\varphi(H)}.$$ ∎

(6.25) *Zu* $d \in G \in \mathfrak{G}$ *existiert* $H \in \overline{d}$ *mit* $G \neq H$ *und* $G \not\perp H$.

Beweis. Es existiert $L \in \overbracket{d}\setminus\{G\}$. Nur der Fall $L \perp G$ muss behandelt werden. Wähle $a \in G \setminus \{d\}$ und $b \in L \setminus \{d\}$. Nach (6.22.1) gilt $A = \overline{a,b} \not\perp G, L$ und $\widetilde{A}(d) \notin L$. Somit gilt $H := \overline{d, \widetilde{A}(d)} \neq L, G$. ■

Wir schreiben $\mathcal{I} := \{\varphi \in \mathcal{B}\,;\ \varphi^2 = \mathrm{id} \neq \varphi\}$ für die Menge aller Involutionen in $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ für die Menge aller Geradenspiegelungen. Es gilt also $\tilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}$.

(6.26) *Sei $\varphi \in \mathcal{B} \setminus \{\mathrm{id}\}$ und $d \in \mathrm{Fix}\varphi$.*

(1) *Gibt es $G \in \overbracket{d}$ mit $\varphi(G) = G$, dann gilt $\varphi \in \mathcal{I}$.*

(2) *Ist $\varphi \in \mathcal{I}$ und gibt es $G \in \overbracket{d}$ mit $\varphi(G) \neq G$, so gilt $\varphi \in \tilde{\mathfrak{G}}$.*

(3) *Ist $\varphi \in \mathcal{I} \setminus \tilde{\mathfrak{G}}$, so gilt $\varphi(G) = G$ für alle $G \in \overbracket{d}$.*

(4) *Gilt $\varphi(G) = G$ für alle $G \in \overbracket{d}$, so ist $\varphi\widetilde{G} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ und $\varphi\widetilde{G}(d) = d$ für alle $G \in \overbracket{d}$.*

Beweis. (1) Für $x \in G \setminus \{d\}$ gilt $(d, \varphi(x), x) \equiv (d, \varphi^2(x), \varphi(x)) \equiv (d, \varphi(x), \varphi^2(x))$. Aus (W1) folgt $\varphi^2(x) = x$. Da auch $\varphi^2(d) = d$ ergibt sich mit (6.20.2) $\varphi^2 = \mathrm{id}$ oder $\varphi^2 = \widetilde{G}$. Wäre $\varphi^2 = \widetilde{G}$, dann würde für $y \in E \setminus G$ gelten $(y, \varphi(y)) \equiv (\varphi(y), \widetilde{G}(y))$. Nach (6.22.2) ist das nur für $\varphi(y) \in \widetilde{G}$ möglich, im Widerspruch zu $y \notin G$ und $\varphi(G) = G$.
Also muss $\varphi^2 = \mathrm{id}$ gelten.
(2) Sei $x \in G \setminus \{d\}$ mit $x' = \varphi(x) \notin G$. Wegen $(d, x) \equiv (d, x')$ gibt es nach (6.22.3) ein Mittellot H von x, x', also $\widetilde{H}(x) = x'$ und $d \in H$. Somit gilt

$$\widetilde{H}\varphi(d) = d, \quad \widetilde{H}\varphi(x) = x, \quad \widetilde{H}\varphi(x') = \widetilde{H}(x) = x'.$$

Daher hat die Bewegung $\widetilde{H}\varphi$ drei nicht kollineare Fixpunkte und mit (6.20.3) gilt $\widetilde{H}\varphi = \mathrm{id}$. Das zeigt $\varphi = \widetilde{H}$.
(3) folgt direkt aus (2).

(4) Wegen (1) ist φ eine Involution. Sei $G \in \overbracket{d}$. Wegen (6.25) gibt es $H \in \overbracket{d}$ mit $G \neq H$ und $G \not\perp H$, d. h. $\widetilde{G}(H) \neq H$. Es folgt $\varphi\widetilde{G}(H) \neq H$ und daher $\varphi\widetilde{G} \neq \mathrm{id}$.
Aus $\varphi(G) = G$ folgt mit (6.21.1)

$$\widetilde{G} = \widetilde{\varphi(G)} = \varphi\widetilde{G}\varphi^{-1} = \varphi\widetilde{G}\varphi \implies \varphi\widetilde{G}\varphi\widetilde{G} = \mathrm{id} \implies \varphi\widetilde{G} \in \mathcal{I}.$$

Nach (2) gilt $\varphi\widetilde{G} \in \tilde{\mathfrak{G}}$. ■

(6.27) Dreispiegelungssatz. *Für $d \in E$ und $A, B, C \in \overbracket{d}$ gibt es genau ein $G \in \overbracket{d}$ mit $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{G}$.*

Beweis. Gilt $A = B$, so folgt $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{C}$ — die Behauptung.

Gilt $A \perp B$, so ist $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B} \in \mathcal{I}$, aber wegen (6.24.2) $\varphi \notin \tilde{\mathfrak{G}}$. Nach (6.26.3,4) gilt $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} = \varphi\widetilde{C} \in \tilde{\mathfrak{G}}$.

Es bleibt also der Fall $A \neq B$ und $\widetilde{A}\widetilde{B} \notin \mathcal{I}$. Sei $\psi = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$. Für $x \in C \setminus \{d\}$ gilt $x' = \psi(x) = \widetilde{A}\widetilde{B}(x) \neq x$ nach (6.24.1). Aus (6.26.1) und $\widetilde{A}\widetilde{B} \notin \mathcal{I}$ folgt $x' \notin C$, sodass d, x, x' nicht kollinear liegen und $(d, x) \equiv (d, x')$ erfüllen. Nach (6.22.3) existiert ein Mittellot M von x, x' und $d \in M$. Man hat also $\widetilde{M}\psi(d) = d$ und $\widetilde{M}\psi(x) = \widetilde{M}(x') = x$ und (6.20.2) zeigt $\widetilde{M}\psi = \mathrm{id}$ oder $\widetilde{M}\psi = \widetilde{\overline{d, x}} = \widetilde{C}$.

Wäre $\widetilde{M}\psi = \widetilde{C}$, so folgte $\widetilde{M}\widetilde{A}\widetilde{B} = \mathrm{id}$ — im Widerspruch zu (6.24.2).

Also muss $\widetilde{M}\psi = \mathrm{id}$ gelten — und das impliziert die Behauptung. ∎

Wir halten ohne Beweis fest

(6.28) Satz. *Ist E endlich, so ist $(E, \mathfrak{G})$ eine affine Ebene.*

Euklidische Ebenen — axiomatisch

Wir erinnern daran, dass *euklidische Ebenen* affine Ebenen mit Kongruenz sind, die also die Axiome (W1), (W2), (W3) erfüllen. Außerdem gilt (I3), das Minimalmodell affiner Ebenen scheidet also aus.

Insbesondere sind affine Ebenen Austauschebenen (vgl. § **??**) und alle Sätze des vorigen Abschnitts gelten.

Wir werden sehen, dass alle Bewegungen mit Geradenspiegelungen beschrieben werden können. Dabei spielt der Dreispiegelungssatz eine wichtige Rolle.

Im Folgenden sei also stets $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine euklidische Ebene. Wir denken uns bei Bedarf die affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ in den projektiven Abschluss eingebettet. Die Ferngerade sei stets mit F bezeichnet. Jede Bewegung φ besitzt eine Fortsetzung φ^* auf den projektiven Abschluss. Diese Bezeichnung werden wir häufig ohne Hinweis verwenden.

Wichtig ist die Tatsache, dass für jedes $G \in \mathfrak{G}$ die Fortsetzung der Spiegelung $\widetilde{G}^*$ eine Zentralkollineation mit Achse $G \cup \{[G]\}$ und Zentrum $[L]$ ist, wenn $L \perp G$.

(6.29) *Seien $G, H, L \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp L$. Es gilt: $\quad H \perp L \iff G \| H$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $[G]$ das Zentrum von $\widetilde{L}^*$. OE gilt $H \neq L$, dann ist wegen (6.21.2)

$$H \perp L \iff \widetilde{L}(H) = H \iff [H] = [G], \quad \text{das Zentrum von } \widetilde{L}^*.$$

das bedeutet aber gerade $H \| G$. ∎

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung.

(6.30) Satz. *Für $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \| H$ ist $\widetilde{G}\widetilde{H}$ eine Translation mit Richtung orthogonal zu G.*

Beweis. OE gelte $G \neq H$. Wir setzen $\tau = \widetilde{G}\widetilde{H}$. Wegen (6.24.1) und $G \cap H = \varnothing$ hat τ keine Fixpunkte.

Wegen (6.29) ist ein Lot L auf G auch ein Lot auf H, also ist $[L]$ das Zentrum von $\widetilde{G}^*$ und von $\widetilde{H}^*$. Dann ist $[L] \in F$ auch Zentrum von $\tau^* = \widetilde{G}^*\widetilde{H}^*$ (vgl. (5.1.4)).

Da alle Fixpunkte auf F liegen müssen, und es eine Achse geben muss, ist F die Achse von τ^*. Daher ist τ eine Translation. ■

(6.31) Satz. *Seien $a, b \in E$ zwei verschiedene Punkte.*

(1) *a, b haben genau ein Mittellot.*

(2) *Für alle $c \in \overline{a,b}$ existiert genau ein $L \in \overline{c}$ mit $L \perp \overline{a,b}$.*

(3) *Es existiert (genau) eine Translation τ mit $\tau(a) = b$. Somit ist $(E, \mathfrak{G})$ eine Translationsebene.*

Beweis. (1) Wähle $G \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp \overline{a,b}$ und $c \in G \setminus \overline{a,b}$. Für

$$d = \left\{a \,\middle\|\, \overline{c, G(b)}\right\} \cap \overline{b,c} \quad \text{und} \quad M = \left\{d \perp \overline{a,b}\right\} \quad \text{ist} \quad \widetilde{M}\widetilde{G}$$

nach (6.30) eine Translation. Daher gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{M}\widetilde{G}(\overline{c,b}) \| \overline{c,b} \implies \widetilde{M}(\overline{c,b}) \| \widetilde{G}(\overline{c,b}) = \overline{c, \widetilde{G}(b)} &\implies \widetilde{M}(\overline{c,b}) = \{d \| \overline{c, \widetilde{G}(b)}\} = \overline{a,d} \\ \implies \widetilde{M}(b) = \overline{a,b} \cap \overline{a,d} = a.\end{aligned}$$

Daher ist M das gesuchte Mittellot. Die Eindeutigkeit steht schon in (6.22.2).

(2) Sei M das Mittellot von a, b, dann tut es $L = \{c \| M\}$ wegen (6.29). Ein weiteres Lot durch c wäre ebenfalls parallel zu M.

(3) Sei M das Mittellot von a, b und $L = \{a \perp \overline{a,b}\}$, die nach (1) bzw. (2) existieren. Es gilt $M \| L$ nach (6.29), und $\tau = \widetilde{M}\widetilde{L}$ ist eine Translation. Weiter gilt $\tau(a) = \widetilde{M}(a) = b$. ■

(6.32) Bemerkung. 1. Man kann also in euklidischen Ebenen auf jede Gerade in jedem Punkt dieser Geraden genau ein *Lot errichten.*

2. Zu Translationsebenen vgl. auch (5.20) und die folgenden Aussagen.

3. Wie in (5.21.2) beschrieben, kann auf E eine Addition so eingeführt werden, dass $(E, +)$ eine kommutative Gruppe wird. Das neutrale Element sei mit 0 bezeichnet.

4. Durch eine weitere Konstruktion, die hier nicht beschrieben werden soll, kann man eine (kommutative) Multiplikation (mit neutralem Element 1) auf E so einführen, dass $(E,+,\cdot)$ ein Körper wird. Setzt man $K = \overline{0,1}$, so kann man zeigen, dass $\widetilde{K} : E \to E$ ein involutorischer Körperautomorphismus ist. Das führt auf den

(6.33) Darstellungssatz. *Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine euklidische Ebene. Auf E existieren eine Addition, eine Multiplikation und ein involutorischer Körperautomorphismus $\overline{} = \widetilde{\overline{0,1}}$ so, dass $(E,+,\cdot)$ Körper, und $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ die euklidische Ableitung von $(E, \overline{})$ ist. Insbesondere gilt $(a,b) \equiv (c,d) \iff (a-b)\overline{(a-b)} = (c-d)\overline{(c-d)}$ für $a,b,c,d \in E$.*

Eine direkte Folgerung ist

(6.34) Satz. *In jeder euklidischen Ebene gilt der große Satz von Pappus (AP).* ■

Wir steuern jetzt eine Klassifikation aller Bewegungen an.

(6.35) Satz. *Sei $\varphi \in \mathcal{B}$*

(1) *Gilt* $\mathrm{Fix}\varphi = \{z\}$, *so gibt es Geraden $G, H \in \overline{z}$ mit $\varphi = \widetilde{G}\widetilde{H}$.*
φ heißt dann Drehung *um z.*

(2) *φ ist Produkt von höchsten drei Geradenspiegelungen.*

Beweis. Wir benutzen die Existenz von Mittelloten (6.31).

(1) Für $x \in E \backslash \{z\}$ gilt $(z,x) \equiv (z,\varphi(x))$. Daher enthält das Mittellot G von $x, \varphi(x)$ den Punkt z. Somit hat $\widetilde{G}\varphi$ die Fixpunkte x und z. Nach (6.20.1) gilt entweder $\widetilde{G}\varphi = \mathrm{id}$, was sofort auf den Widerspruch $\varphi = \widetilde{G}$ führt, oder $\widetilde{G}\varphi = \widetilde{\overline{z,x}}$. Das ist die Behauptung.

(2) Ist $\mathrm{Fix}\varphi \neq \varnothing$, so liefern (6.20.2) und (1) jeweils die Behauptung. In der Tat ist φ das Produkt von höchsten zwei Geradenspiegelungen.

Es bleibt der Fall, dass es keinen Fixpunkt gibt. Sei $x \in E$. Für das Mittellot M von $x, \varphi(x)$ gilt $x \in \mathrm{Fix}\widetilde{M}\varphi$. Nach unserer Vorüberlegung ist $\widetilde{M}\varphi$ das Produkt von höchsten zwei Geradenspiegelungen. Daher folgt auch hier die Behauptung. ■

(6.36) Bemerkung. 1. Der obige Beweis benutzt nur die Existenz von Mittelloten. Daher gilt er insbesondere auch für das Kleinsche Modell einer hyperbolischen Ebene.

2. Die Darstellung einer Drehung durch zwei Spiegelungen ist keineswegs eindeutig. In der Tat gibt es für $\varphi = \widetilde{G}\widetilde{H}$ mit $z = G \cap H$ und $A \in \overline{z}$ immer je genau ein $B, B' \in \overline{z}$ mit $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}$ bzw. $\varphi = \widetilde{B'}\widetilde{A}$.

3. Im Fall $E = \mathbb{C}$ ist der Drehwinkel von φ die Beziehung $\angle(x, z, \varphi(x)) = 2 \cdot \angle(H, G)$.

4. Analoges gilt für die Darstellung von Translationen als Produkt zweier Geradenspiegelungen. Das zeigt der folgende Satz.

(6.37) Dreispiegelungssatz für Lotbüschel. *Für die Geraden $A, B, C, L \in \mathfrak{G}$ gelte $A, B, C \perp L$. Dann existiert genau ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} = \widetilde{G}$. Dabei gilt $G \perp L$.*

Beweis. Nach (6.24.2) gilt $\varphi := \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} \neq \mathrm{id}$. Statt L kann wegen (6.29) jede Gerade parallel zu L stehen. Daher kann oE angenommen werden, dass es $x \in L$ gibt mit $\varphi(x) \neq x$.

Es gilt $\varphi(L) = L$, denn L ist unter allen gegeben Spiegelungen invariant. Somit folgt $\varphi(x) \in L$. Sei G das Mittellot von $x, \varphi(x)$. Es gilt $G \perp L$, also $G \| A$ und $\widetilde{G}\varphi(x) = x$.

Da $\tau = \widetilde{G}\widetilde{A}$ und $\tau' = \widetilde{B}\widetilde{C}$ nach (6.30) Translationen sind, und damit $\tau\tau' = \widetilde{G}\varphi$ eine Translation mit Fixpunkt x ist, folgt $\widetilde{G}\varphi = \mathrm{id}$. Das ist die Behauptung. ∎

Für den Rest des Abschnitts brauchen wir eine weitere Voraussetzung:
Wir nehmen an, dass für alle $G, H \in \mathfrak{G}$ gilt $\quad G \perp H \implies G \cap H \neq \varnothing$.

(6.38) Bemerkung. 1. Für einen koordinatisierenden Körper E bedeutet das $\operatorname{char} E \neq 2$, d. h. $2 \neq 0$.

2. Zwei verschiedene Punkte a, b haben dann immer einen Mittelpunkt $m = \overline{a, b} \cap M$, wenn M das Mittellot von a, b ist (vgl. (6.22.2)). Im Fall $a = b$ setzt man natürlich $m = a = b$. In jedem Fall ist $m = \frac{1}{2}(a + b)$ (siehe Übung).

3. Im Fall $\operatorname{char} E = 2$ gilt tatsächlich $G \perp H \implies G \| H$.

Definition. Eine Bewegung φ heißt *Gleitspiegelung* oder *Schubspiegelung*, wenn es Geraden $A, B, G \in \mathfrak{G}$ gibt mit $A, B \perp G$ und $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{G}$.

φ ist also die Verkettung einer Spiegelung mit einer anschließenden Translation in Richtung von G (vgl. (6.30)).

Eine Gleitspiegelung heißt *echt*, wenn $A \neq B$, wenn also φ keine Spiegelung ist.

Wir halten die wichtigsten Eigenschaften fest.

(6.39) *Seien $A, B, G \in \mathfrak{G}$ mit $A, B \perp G$ und $A \neq B$. Setze $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{G}$ und $\tau = \widetilde{A}\widetilde{B}$, sodass $\varphi = \tau\widetilde{G}$ eine echte Gleitspiegelung ist.*

(1) *τ und $\widetilde{G}$ sind vertauschbar, d. h. $\tau\widetilde{G} = \widetilde{G}\tau$.*
Insbesondere ist auch $\varphi^{-1} = \tau^{-1}\widetilde{G}$ eine echte Gleitspiegelung.

(2) *G ist einziges Fixelement von φ.*
Genauer: φ hat keine Fixpunkte, und G ist einzige Fixgerade.

(3) *Die Translation τ und die Gerade G sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. (1) Mit (6.21.2) gilt $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{G} = \widetilde{A}\widetilde{G}\widetilde{B} = \widetilde{G}\widetilde{A}\widetilde{B}$.

(2) Anngenommen es gibt einen Fixpunkt x. Dann gilt $x \neq \tau(x) = \widetilde{G}(x)$. Es folgt

$$\overline{x, \tau(x)} \| G \perp \overline{x, \widetilde{G}(x)} \overset{!}{=} \overline{x, \tau(x)}.$$

Das ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung $G \cap \overline{x, \widetilde{G}(x)} \neq \varnothing$. Also gibt es keinen Fixpunkt.

Dass G eine Fixgerade ist, ist klar.

Sei H eine weitere Fixgerade von φ. Im Fall $x = G \cap H$ ergibt sich der Widerspruch $\varphi(x) = x$. Also gilt $G \| H$.

Weil H deshalb Richtung von τ ist, gilt $H = \varphi(H) = \widetilde{G}\tau(H) = \widetilde{G}(H)$, somit $G \cap H \neq \varnothing$ und daher $G = H$.

(3) ist eine direkte Folge von (2) und der Tatsache, dass $\varphi\widetilde{G}$ eine Translation ist. ∎

Die Gerade G wird manchmal als *Achse* der Gleitspiegelung bezeichnet. Da G keine Fixpunktgerade ist, deckt sich das nicht mit unserer gewohnten Sprechweise — also Vorsicht!

Es folgt die versprochene Klassifikation von Bewegungen.

(6.40) Satz. *Jede Bewegung $\varphi \in \mathcal{B}$ ist von einem der folgenden Typen*

- *Translation*
- *Drehung (d. h. $\varphi = \widetilde{A}\widetilde{B}$ mit $A \cap B = z$)*
- *Gleitspiegelung (d. h. $\varphi = \tau\widetilde{G}$ mit einer Translation τ, auch $\tau = \mathrm{id}$ möglich).*

Beweis. Wegen (6.35) und (6.30) ist nur noch der Fall $\varphi = \widetilde{G}\widetilde{H}\widetilde{L}$ mit verschiedenen $G, H, L \in \mathfrak{G}$ zu betrachten. Nach (6.37) dürfen wir oE annehmen, dass nicht alle drei Geraden parallel sind. Nach Übergang zu $\varphi^{-1} = \widetilde{L}\widetilde{H}\widetilde{G}$ falls nötig, dürfen wir also $a = G \cap H$ voraussetzen. In der Tat, φ ist von einem der genannten Typen genau dann, wenn φ^{-1} vom selben Typ ist (vgl. insbesondere (6.39.1)).

Setze $K = \{a \perp L\}$, $b = K \cap L$ und $A = GHK$ (Dreispiegelungssatz im Punkt a). Nun sei $B = \{b \| A\}$ und $D = BKL$ (Dreispiegelungssatz im Punkt b). Wir haben $KL = BD$ ist eine Involution. Daher gilt $B \perp D$ und mit (6.29) $A \perp D$. Schließlich findet man $\varphi = GHL = AKL = ABD$ ist eine Gleitspiegelung (mit Achse D).

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. ∎

(6.41) Satz von Thales. *Seien $a, b, c \in E$ nicht kollinear und m Mittelpunkt von a, b. Dann gilt:* $\quad (m, c) \equiv (m, a) \iff \overline{a, c} \perp \overline{b, c}$.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Seien G, H die Mittellote von a, c bzw. c, b, dann gilt $m = G \cap H$ und $\widetilde{H}\widetilde{G}(a) = \widetilde{H}(c) = b$. Daher hat man $\widetilde{H}\widetilde{G}(\overline{a, b}) = \overline{a, b}$ und nach (6.26.1) ist $\widetilde{H}\widetilde{G}$ involutorisch. Daher gilt $G \perp H$. Da auch $\overline{b, c} \perp H$ folgt mit (6.29) $\overline{b, c} \| G$. Wegen $G \perp \overline{a, c}$ erhält man $\overline{a, c} \perp \overline{b, c}$.

„$\Longleftarrow$“: Es sei d der Mittelpunkt von a, c, und es sei τ bzw. τ' die Translationen mit $\tau(a) = m$ bzw. $\tau'(a) = d$, die nach (6.31) existieren. Sei $M = \{m \perp \overline{a, b}\}$ und L das Mittellot von a, m. Dann gilt $\tau = \widetilde{M}\widetilde{L}$. Es folgt $\tau(m) = \widetilde{M}\widetilde{L}(m) = \widetilde{M}(a) = b$. Analog zeigt man $\tau'(d) = c$.

Nach (5.22) bilden die Translationen eine kommutative Gruppe. Daher gilt

$$\tau'\tau^{-1}(m) = d \quad \text{und} \quad \left(\tau'\tau^{-1}\right)^2(b) = \tau'\tau'\tau^{-1}\tau^{-1}(b) = \tau'\tau'\tau^{-1}(m) = \tau'\tau'(a) = \tau'(d) = c.$$

Deshalb ist $[\overline{d, m}]$ Richtung von $\tau'\tau^{-1}$ und $[\overline{b, c}]$ ist Richtung von $\left(\tau'\tau^{-1}\right)^2$. Diese müssen aber gleich sein. Das zeigt $G := \overline{d, m} \| \overline{b, c}$. Aus $\overline{a, c} \perp \overline{b, c}$ folgt mit (6.29) $\overline{a, c} \perp G$, und G ist Mittellot von a, c. Es folgt $\widetilde{G}(a) = c$ und daher $(m, c) \equiv (m, a)$. ∎

Für die letzten beiden Aussagen sei E ein Körper mit einem involutorischen Automorphismus $\overline{}$ und dem Fixkörper K. Es gelte $2 \neq 0$. Weiter sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ die euklidische Ableitung. Wir erinnern an die quadratische Form $Q(x) = x\overline{x}$ und die zugehörige Bilinearform B_Q, die durch $B_Q(x, y) = x\overline{y} + \overline{x}y$ festgelegt ist (siehe (6.5)).

(6.42) *Sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ euklidische Ableitung des Körpers E mit dem involutorischen Automorphismus $\overline{}$ und es sei $2 \neq 0$.*

(1) *Die Punkte a, b besitzen den Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a + b)$.*

(2) *Für drei verschiedene Punkte $a, b, c \in E$ gilt* $\quad \overline{a, c} \perp \overline{b, c} \iff B_Q(a-c, b-c) = 0$.

Beweis. (1) Siehe Aufgabe 49.

(2) Es gilt einerseits $\overline{a, c} \perp \overline{b, c} \iff s := \widetilde{\overline{a, c}}(b) \in \overline{b, c}$ (etwa wegen (6.26)) und andererseits $s \in \overline{b, c} \iff s = 2c - b$, denn in diesem Fall ist c Mittelpunkt von s, b. Weiter gilt mit (6.8.2)

$$\begin{aligned} s = c + \frac{a - c}{\overline{a - c}}\left(\overline{b - c}\right) = 2c - b \quad &\iff \quad (a - c)\overline{(b - c)} = -(b - c)\overline{(a - c)} \\ &\iff \quad B_Q(a - c, b - c) = 0. \end{aligned}$$

∎

(6.43) Satz von Pythagoras. *Sei* $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ *euklidische Ableitung des Körpers* E *mit dem involutorischen Automorphismus* $\overline{}$ *und es sei* $2 \neq 0$*. Für drei nicht kollineare Punkte* $a, b, c \in E$ *gilt* $\overline{a,c} \perp \overline{b,c} \iff Q(a-c) + Q(b-c) = Q(a-b)$.

Beweis. $Q(a-b) = Q(a-c-(b-c)) = Q(a-c) + Q(b-c) - B_Q(a-c, b-c) =$

$$= Q(a-c) + Q(b-c) \iff B_Q(a-c, b-c) = 0 \iff \overline{a,c} \perp \overline{b,c} \quad \text{mit (6.42).} \qquad \blacksquare$$

Literatur

[1] Beutelspacher and Rosenbaum. *Projektive Geometrie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1992.

[2] Hughes and Piper. *Projective planes*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[3] Karzel, Sörensen, and Windelberg. *Einführung in die Geometrie*. Vandenhoeck, 1973.

[4] Lingenberg. *Grundlagen der Geometrie I*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1969.

[5] E. Schröder. *Vorlesungen über Geometrie I, II, III*. BI-Wissenschafts-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1991.