# Geometrie II

**Blatt 6** SoS 2007 — H. Kiechle

### Präsenzaufgabe

**22.** Sei $(P,\mathcal{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum. Die Abbildung

$$\overline{\phantom{X}} : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{U};\ X \mapsto \overline{X} := \bigcap_{X \subseteq U \in \mathcal{U}} U$$

ist ein *Hüllenoperator*, d. h. für alle $X, Y \subseteq P$ gilt

(H1) $X \subseteq \overline{X}$ (H2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ (H3) $X \subseteq Y \implies \overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Sei umgekehrt eine Menge $P$ mit einem Hüllenoperator $\overline{\phantom{X}} : \mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(P)$ gegeben, dann ist $\mathcal{U} := \{\overline{X}\,;\ X \in \mathcal{P}(P)\}$ $\cap$-abgeschlossen.

### Hausaufgaben

**23.** In der absoluten Ebene $(E, \mathfrak{G})$ sei der Winkel $\alpha = \angle(b, a, c)$ gegeben. Es sei $(a, b) \equiv (a, c)$ vorausgesetzt. Wir setzen $W := \{a \perp \overline{b, c}\}$ und $w := W \cap \overline{b, c}$. Die Gerade $W$ (und gelegendlich auch $\overrightarrow{a, w}$) wird *Winkelhalbierende* von $\alpha$ genannt.

(a) Für Punkte $b' \in \overrightarrow{a, b}, c' \in \overrightarrow{a, c}$ mit $(a, b') \equiv (a, c')$ gilt $W \perp \overline{b', c'}$.

(b) Sei $x \in E$ und $B := \{x \perp \overline{a, b}\}$ mit $f_b = B \cap \overrightarrow{a, b} \neq \varnothing$. Dann gilt

$$\Big(f_c = \{x \perp \overline{a, c}\} \cap \overrightarrow{a, c} \neq \varnothing \text{ und } (x, f_b) \equiv (x, f_c)\Big) \iff x \in \overrightarrow{a, w}.$$

(c) Interpretieren Sie dieses Ergebnis für $E = \mathbb{R}^2$ umgangssprachlich.

(d) Die drei Winkelhalbierenden jedes Dreiecks in $E$ besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt.

**24.** Sei $(V, K)$ ein Vektorraum und $\varnothing \neq S \subseteq V$. Es bezeichne $\langle X \rangle$ den von $X$ erzeugten Untervektorraum von $V$. Bekanntlich ist $\langle\ .\ \rangle$ ein Hüllenoperator.

(a) Für $s_1, s_2 \in S$ gilt $\langle S - s_1 \rangle = \langle S - s_2 \rangle$.

(b) Für $s_1, s_2 \in S$ gilt $s_1 + \langle S - s_1 \rangle = s_2 + \langle S - s_2 \rangle$.

(c) Durch $\overline{S} := s + \langle S - s \rangle$, $s \in S$, und $\overline{\varnothing} := \varnothing$ wird ein Hüllenoperator auf $V$ definiert.

(d) Geben Sie eine geometrische Deutung dieser Hülle im Fall $V = \mathbb{R}^3$.

**25.** Sei $\mathcal{A}$ die Menge der abgeschlossenen Teilmengen in $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Topologie).

(a) $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ ist ein $\cap$-abgeschlossener Raum.

(b) Für $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ gilt das Austauschaxiom.

(c) Die Endlichkeitsbedingung gilt nicht in $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.