Geometrie II

Blatt 11 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

42. Seien $(P, \mathfrak{G})$, $(P', \mathfrak{G}')$ Inzidenzräume, $\sigma : P \to P'$ ein Isomorphismus und $\phi \in \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G})$.

(a) $\hat{\sigma} : \mathrm{Aut}(P, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Aut}(P', \mathfrak{G}')$; $\kappa \mapsto \sigma\kappa\sigma^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(b) $a \in P$ ist Fixpunkt von ϕ genau dann, wenn $\sigma(a)$ Fixpunkt von $\sigma\phi\sigma^{-1}$ ist. Entsprechend für Fixgeraden, Fixebenen, usw.

(c) Für $G \in \mathfrak{G}$ gilt $G \parallel \phi(G)$ genau dann, wenn $\sigma(G) \parallel \sigma\phi\sigma^{-1}\sigma(G)$.

Hausaufgaben

43. (8 Punkte) Für einen affinen Raum $(A, \mathfrak{G})$ bezeichne $\mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})$ die Gruppe seiner Automorphismen. Ferner bezeichne $\Delta = \Delta(A, \mathfrak{G}) := \{\delta \in \mathrm{Aut}(A, \mathfrak{G})\,;\ \forall G \in \mathfrak{G} : \delta(G) \| G\}$ die Gruppe aller *Dilatationen* und $T = T(A, \mathfrak{G}) := \{\delta \in \Delta\,;\ \forall x \in A : \delta(x) \neq x\} \cup \{\mathrm{id}\}$ die Gruppe aller *Translationen*. Für alle $\delta \in \Delta$ gilt

(a) Für $G \in \mathfrak{G}$, $x \in G$ mit $\delta(x) \in G$ folgt $\delta(G) = G$. Also sind durch $\overline{x, \delta(x)}$ für $x \neq \delta(x)$ Fixgeraden gegeben.

(b) Besitzt δ zwei verschiedene Fixpunkte, so gilt $\delta = \mathrm{id}$.

(c) Sei E eine Ebene und $x \in E$ mit $\delta(x) \in E$, so ist $\delta(E) = E$.

(d) Zu $a, b \in A$ existiert höchstens eine $\tau \in T$ mit $\tau(a) = b$.

(e) T ist tatsächlich eine Gruppe.

(f) Sei (V, K) ein Vektorraum, dann sind die Gruppen $(V, +)$ und $T(\mathrm{AG}(V, K))$ isomorph (Isomorphismus angeben und begründen!).

44. In $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ sei $E := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\ x_1 - x_3 = 1\}$ gegeben. Wir fassen $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$ gemäß Aufgabe 40 als projektiven Abschluss von $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ auf.

(a) E ist eine Ebene.

(b) Beschreibe $\overline{E}$, die Hülle von E in $\mathrm{PG}(3, \mathbb{R})$, in Koordinaten.

(c) Bestimme $G = \overline{E} \cap F$ und zeige dass G eine Gerade ist (F wie in Aufgabe 40).

(d) Bestimme alle Ebenen E' von $\mathrm{AG}(3, \mathbb{R})$ mit $G = \overline{E'} \cap F$.