Geometrie II

Blatt 1 SoS 2007 — H. Kiechle

Präsenzaufgabe

1. Es sei $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ eine Ebenen mit Kongruenz in der das folgende Axiom gilt:

(WF) Seien $a, b, x \in E$ nicht kollinear, dann gibt es ein $c \in \overline{a, x}$ mit $(a, b) \equiv (a, c)$.

(a) Für alle $a, b \in E$ und $c \in G \in \mathfrak{G}$ existiert ein $d \in G$ mit $(a, b) \equiv (c, d)$.

(b) In der euklidischen Ableitung $(E, \mathfrak{G}, \equiv)$ von $(\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q})$ gilt (WF) nicht.

Hausaufgaben

2. Sei (V, K) ein Vektorraum. In der affinen Koordinatenebene $\mathrm{AG}(V, K)$ seien drei verschiedenen kollineare Punkte a, b, c gegeben und es sei $\lambda := \mathrm{Tv}(a, b, c)$. Dann gilt

$$\mathrm{Tv}(a, c, b) = \lambda^{-1} \qquad \mathrm{Tv}(b, a, c) = 1 - \lambda \qquad \mathrm{Tv}(b, c, a) = (1 - \lambda)^{-1}$$
$$\mathrm{Tv}(c, a, b) = 1 - \lambda^{-1} \qquad \mathrm{Tv}(c, b, a) = (1 - \lambda^{-1})^{-1} = \lambda(\lambda - 1)^{-1}.$$

Einige dieser Aussagen gelten auch für $b = c$. Welche?

3. Seien (V, K) eine Vektorraum und a_1, a_2, a_3 drei nicht kollineare Punkte in $\mathrm{AG}(V, K)$. Weiter seien für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ die Punkte $b_i \in \overline{a_j, a_k} \setminus \{a_j, a_k\}$ gegeben („a_1, a_2, a_3 bilden die Ecken eines Dreiecks und die b_i liegen auf den Dreiecksseiten, aber nicht in den Ecken“).

(a) *Satz von Menelaos:* Die Punkte b_1, b_2, b_3 liegen kollinear genau dann, wenn $\mathrm{Tv}(b_3, a_1, a_2) \cdot \mathrm{Tv}(b_2, a_3, a_1) \cdot \mathrm{Tv}(b_1, a_2, a_3) = 1$.

(b) *Satz von Ceva:* Die Geraden $\overline{a_1, b_1}, \overline{a_2, b_2}, \overline{a_3, b_3}$ schneiden sich in einem Punkt, oder sind parallel genau dann, wenn $\mathrm{Tv}(b_3, a_1, a_2) \cdot \mathrm{Tv}(b_2, a_3, a_1) \cdot \mathrm{Tv}(b_1, a_2, a_3) = -1$.

4. Sei K ein kommutativer Körper und $\iota : \mathrm{AG}(2, K) \to \mathrm{PG}(2, K)$ die kanonische Einbettung. Für vier verschiedene, kollineare Punkte $a, b, c, d \in K^2$ zeige:

$$\mathrm{DV}(\iota(a), \iota(b), \iota(c), \iota(d)) = \frac{\mathrm{Tv}(c, a, b)}{\mathrm{Tv}(d, a, b)}.$$