

## **Anleitung 3 Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften**

### **Elementare Funktionen 2. Teil stereographische Projektion und Möbius-Transformation 29. 04. 2011**

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

**Beispielaufgabe:**

Geben Sie eine Funktionsvorschrift  $f : M \rightarrow S$ ,  $z \mapsto f(z)$  an, die

$$M := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R, \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

für ein festes  $R \in \mathbb{R}^+$  so auf den Halbstreifen

$$S := \{z \in \mathbb{C}; -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

abbildet, dass die Symmetrie des Urbildes bzgl. der reellen Achse in eine Symmetrie des Bildes bzgl. der imaginären Achse übergeht und  $f(R) = i$  gilt.

**Zur Erinnerung: wir können bereits**

**Schieben** : Addition

**Drehen / Strecken** : Multiplikation

**Sektoren vergrößern/verkleinern** : Potenzieren

**Streifen**  $\longleftrightarrow$  **Ring** : exp bzw. Log

**Streifen**  $\longleftrightarrow$  **Sektor** : exp bzw. Log

$$\exp(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin(y)),$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$$

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi), \quad \forall z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \varphi \in ]-\pi, \pi[$$

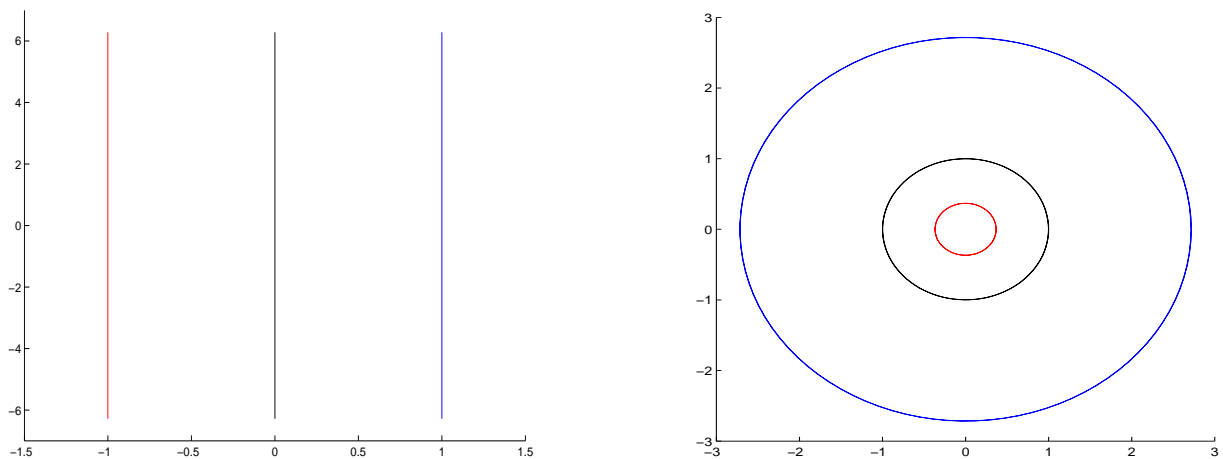
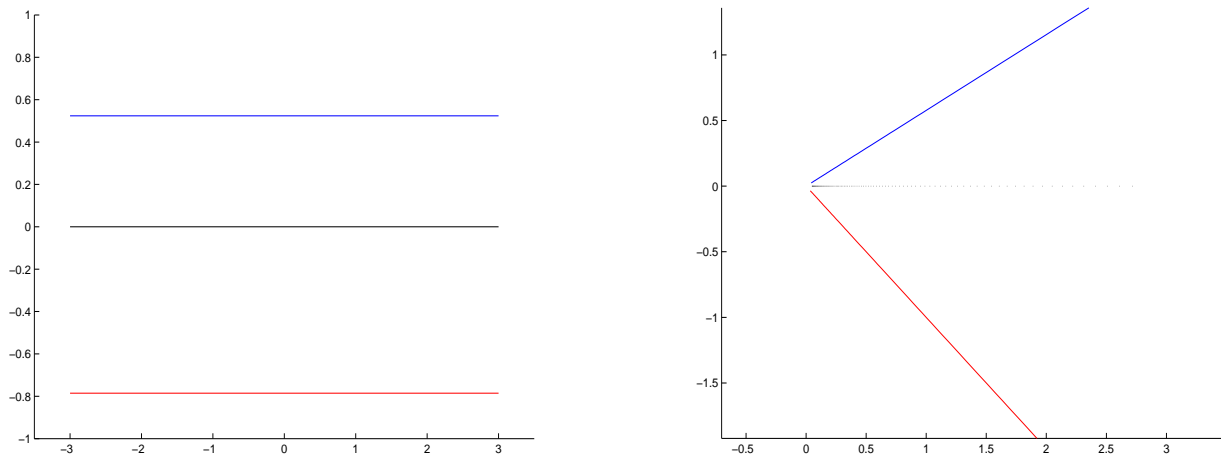


Abbildung 1: Streifen parallel zur  $y$ -Achse  $\rightarrow$  Ring

Abbildung 2: Streifen parallel zur  $x$ -Achse  $\rightarrow$  Sektor**Zurück zur Aufgabe:**

$$M := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R, \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow$$

$$S := \{z \in \mathbb{C}; -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

**1. Schritt)** Log. bildet Kreis auf Streifen  
 Definiere  $f_1(z) := \ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ .

$$f_1 : M \rightarrow S_1,$$

$$S_1 = \{w \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re}(w) < \ln(R), \} \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2} \}$$

Damit haben wir schon einen Halbstreifen.  
 Dieser muss noch gedreht,  
 gestaucht und verschoben werden.

**2. Schritt)** Drehung um  $-\frac{\pi}{2}$

$$f_2(z) := e^{-i\frac{\pi}{2}} f_1(z) = -i \cdot f_1(z).$$

$$f_2 : M \rightarrow S_2,$$

$$S_2 = \{w \in \mathbb{C} : -\ln(R) \leq \operatorname{Im}(z) < \infty, \} \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2} \}$$

**3. Schritt)** Stauchen um Faktor  $\frac{2}{\pi}$

$$f_3(z) := \frac{2}{\pi} \cdot f_2(z).$$

$$f_3 : M \rightarrow S_3,$$

$$S_3 = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{2}{\pi} \ln(R) \leq \operatorname{Im}(z) < \infty, -1 < \operatorname{Re}(z) < 1 \right\}$$

Der Halbstreifen hat jetzt die richtige Orientierung und die richtige Breite. Wir schieben

ihn noch in die Richtige Position:  $\text{Im}(z) > 1$ .

**4. Schritt)** Schieben

$$\begin{aligned} f_4(z) &:= f_3(z) + \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) + 1 \right) \cdot i \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} \ln(z) + 1 \right) \cdot i. \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} (\ln(|z|) + i \cdot \arg(z)) + 1 \right) i \\ &= \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} \ln(|z|) + 1 \right) i + \frac{2}{\pi} \arg(z) \end{aligned}$$

$$f_4 : M \rightarrow S.$$

Symmetrie: gefordert  $\text{Re } f(\bar{z}) = -\text{Re } f(z)$ ,  $\text{Im } f(\bar{z}) = \text{Im } f(z)$ .

$$f_4(z) = \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} \ln(|z|) + 1 \right) i + \frac{2}{\pi} \arg(z).$$

$$f_4(\bar{z}) = \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} \ln(|\bar{z}|) + 1 \right) i + \frac{2}{\pi} \arg(\bar{z}).$$

also  $\text{Re}(f_4(\bar{z})) = -\text{Re}(f_4(z))$  und  $\text{Im}(f_4(\bar{z})) = \text{Im}(f_4(z))$ .

Vorgegebener Funktionswert:

$$f_4(R) = \left( \frac{2}{\pi} \ln(R) - \frac{2}{\pi} \ln(z) + 1 \right) \cdot i.$$

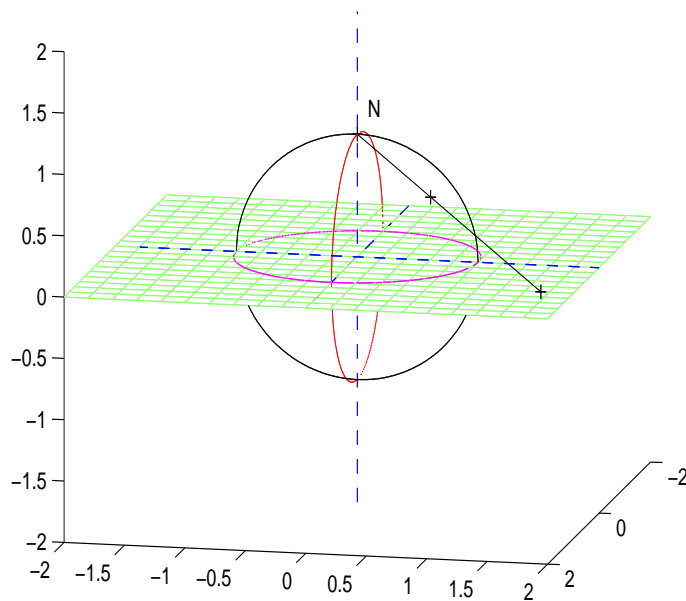
**Möbius-Transformation:**  $T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc, \quad c \neq 0$

Zur Untersuchung dieser Funktionen betrachte die stereographische Projektion:

$S_2 :=$  die Oberfläche der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3 =$  Riemannsche Zahlenkugel

$$S_2 := X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3 : \|X\|_2 = 1$$

wird auf die Ebene  $(X_1, X_2)$  abgebildet und diese wiederum wird mit  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty$  identifiziert. Nordpol der Kugel  $=: N = (0, 0, 1)^T$



Abbildungsvorschrift: bestimme den Schnittpunkt  $(x, y)^T$  der Geraden durch  $X$  und  $N$  mit der  $X_1, X_2$ -Ebene bzw. mit  $\mathbb{C}^*$ . Identifiziere  $X$  mit  $x + iy$ .

Bijektive Abbildung  $P : \mathbb{C} \rightarrow S_2 \setminus \{N\}$

Durch die Festlegung  $P^{-1}(N) =: \infty$

erhält man eine bijektive Abbildung  $P : \mathbb{C}^* \rightarrow S_2$ .

Rechenvorschrift:  $z = x + iy = \frac{X_1}{1 - X_3} + i \frac{X_2}{1 - X_3}$ ,

$$X = \left( \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{1}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right)$$

Gerade in  $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$  Kreis auf  $S_2$  der durch  $N$  geht.

Ebene durch  $N$  geschnitten mit Kugeloberfläche  $S_2$

Kreis in  $\mathbb{C}^* \longleftrightarrow$  Kreis auf  $S_2$  der nicht durch  $N$  geht.

Kegel mit Spitze in  $N$  geschnitten mit Kugeloberfläche  $S_2$

**Verallgemeinerte Kreise** (= Kreise oder Geraden) werden auf verallgemeinerte Kreise abgebildet.

**Beispielaufgaben:**

A) Es sei  $X$  das sphärische Bild von  $z = x+iy$ . Bestimmen Sie das sphärische Bild von  $\frac{1}{z}$ .

B) Bestimmen Sie das Bild des Großkreises  $X_1^2 + X_3^2 = 1$  unter der stereographische Projektion. (Klausur 2004 Struckmeier/Rothe)

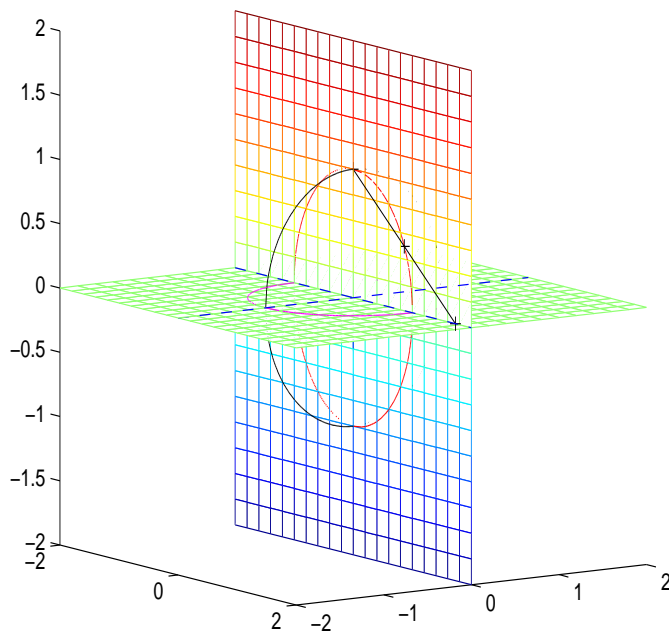
Zu A) Es gilt: 
$$X = \left( \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{1}{i} \cdot \frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2} \right)$$

Wir suchen also:

$$\left( \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{1 + \frac{1}{z\bar{z}}}, \frac{1}{i} \cdot \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}}{1 + \frac{1}{z\bar{z}}}, \frac{\frac{1}{z\bar{z}} - 1}{1 + \frac{1}{z\bar{z}}} \right) =$$

Zu B) Sowohl  $N$  als auch der Großkreis  $X_1^2 + X_3^2 = 1$  liegen in der Ebene  $X_2 = 0$ . Das Bild ist die reelle Achse.

Rechnerisch:  $z = x + iy = \frac{X_1}{1 - X_3} + i \frac{X_2}{1 - X_3} = \frac{X_1}{1 - X_3}$ .



## Möbius-Transformation

$$T : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc, \quad c \neq 0$$

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \infty, \quad T(\infty) = \frac{a}{c}, \quad T(-\frac{d}{c}) = \infty.$$

**Verallgemeinerte Kreise :** Kreise oder Geraden

**Kreistreue:**

$$-\frac{d}{c} \in \text{„Kreis“} \implies T(\text{„Kreis“}) = \text{Gerade}$$

$$-\frac{d}{c} \notin \text{„Kreis“} \implies T(\text{„Kreis“}) = \text{echter Kreis}$$

**Kreissymmetrie :** Symmetrien bzgl. „Kreise“ bleiben erhalten

Symmetrie bzgl. einer Gerade : klar (Spiegelung)

$z, z'$  symmetrisch bzgl. Kreis mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $M \iff$

$z, z'$  liegen auf einem von  $M$  ausgehenden Strahl und

$$\begin{aligned} |z - M| \cdot |z' - M| &= R^2 \\ \iff (z - M) \cdot (\bar{z}' - \bar{M}) &= R^2 \end{aligned}$$

**Mittelpunkt  $M$  und  $\infty$  sind symmetr. bzgl. Kreis**

$$\text{Denn:} \quad z \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad |z - M| \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad |z' - M| \rightarrow 0$$

Für jede Möbius-Transf-  $T$  gilt daher:

$T(M), T(\infty)$  sind symmetrisch bzgl. Bild, „Kreis“

**Beispiel:**

a) Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation  $T : z \rightarrow w$  mit

$$T(2i) = 0, \quad T(-2i) = \infty, \quad T(0) = 1.$$

b) Welches sind die Bilder von

(i)  $i\mathbb{R}$ ,

(ii)  $\mathbb{R}$ ,

(iii)  $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ,

(iv)  $g := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -1\}$

(v)  $Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y > 0\}$

(vi)  $|z| \leq 8$  ?

**Lösung:**

a) Aus  $T(2i) = 0$ ,  $T(-2i) = \infty$  folgt

$$T(z) = k \frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

Damit ist  $T(0) = -k$  bzw.  $k = -1$  und

$$T(z) = \frac{2i - z}{2i + z}.$$

b)

(i) Bild von  $i\mathbb{R}$  : Gerade, da  $T(-2i) = \infty$ .  
 $T(0) = 1$  und  $T(2i) = 0 \implies T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(ii) Bild von  $\mathbb{R}$  : echter Kreis, symmetrisch zum  
 Bild von  $i\mathbb{R}$  also symmetrisch zur reellen Achse. Wegen

$$T(0) = 1 \text{ und } T(\infty) = -1$$

handelt es sich um den Einheitskreis.

(iii) Bild des Kreises  $|z| = 2$ :

Der Punkt  $-2i$  liegt auf dem Kreis, also ist das Bild eine Gerade. Sie geht wegen  $T(2i) = 0$  durch 0 und ist symmetrisch zu  $T(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Das Bild ist die imaginäre Achse.

Alternativ :  $T(2) = i$ : Also Bild Gerade durch 0 und  $i$ .

(iv) Die Nullstelle des Nenners  $-2i$  liegt nicht auf der Geraden  $\operatorname{Re} z = -1$ . Das Bild ist ein echter Kreis.

Im Bildraum sind  $\infty$  und der Mittelpunkt  $M$  des Bildkreises symmetrisch bzgl. des Bildkreises.

Es gilt  $T^{-1}(\infty) = -2i$ .

$\implies T^{-1}(M)$  ist symmetrisch zu  $-2i$  bzgl. der Geraden  $\operatorname{Re} z = -1$ .

$$T^{-1}(M) = -2 - 2i \implies$$

$$M = T(-2 - 2i) = \frac{2i + 2 + 2i}{-2}$$

$$\implies M = -1 - 2i.$$

Zum Beispiel aus

$$T(-1 - 2i) = -1 - 4i$$

oder

$$T(\infty) = -1$$

folgt, dass der Bildkreis den Radius  $R = 2$  hat.



(v) Bild von

$$Q := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y > 0\} :$$

Das Bild von  $i\mathbb{R}$  ist  $\mathbb{R}$ .

Die linke Halbebene wird wegen

$T(-2-2i) = -1-2i$  auf die obere Halbebene abgebildet. Das Bild von  $\mathbb{R}$  ist der Einheitskreis.

Die obere Halbebene wird wegen  $T(2i) = 0$  auf das Innere des Kreises abgebildet.

Damit ist das Bild von  $Q$  die obere Hälfte des Inneren des Einheitskreises (ohne Rand).

(vi) Bild von  $|z| \leq 8$  : Das Bild von  $|z| = 8$  ist ein echter Kreis symmetrisch zu  $\mathbb{R}$ , da Urbild symmetrisch zu  $i\mathbb{R}$ . Mit

$$T(8i) = -\frac{3}{5}, \quad T(-8i) = -\frac{5}{3}$$

erhält man den Mittelpunkt  $M$  und den Radius  $R$ :

$$M = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{5} - \frac{5}{3} \right) = -\frac{17}{15},$$

$$R = \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{5} + \frac{5}{3} \right) = \frac{8}{15}.$$

Wegen  $T(0) = 1$  wird das Innere des Kreises  $|z| \leq 8$  auf das Äußere des obigen Kreises abgebildet.