Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2011
Dr. Hanna Peywand Kiani

Wärmeleitungsgleichung mit anderen Randbedingungen (nicht Dirichlet), symmetrische Differentialoperatoren 08.07.2011

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

Andere Randbedingungen

Beispiel: periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = 0 && x \in (-1,1),\, t > 0\\
&u(-1,t) = u(1,t) && t > 0\\
&u_x(-1,t) = u_x(1,t) && t > 0\\
&u(x,0) = f(x) && x \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Ansatz wie gehabt : Produktansatz $u(x,t) = w(x).v(t)$

Einsetzen in DGL: $\frac{\dot{v}}{v} = \frac{w''}{w} = -\lambda$

Randwerte liefern:

$u(-1,t) = u(1,t) \longrightarrow w(1) = w(-1)$

$u_x(-1,t) = u_x(1,t) \longrightarrow w'(1) = w'(-1)$

Je nach Vorzeichen von λ, hat $w'' = -\lambda w$, als Lösungen:

$\lambda = 0 \Longrightarrow w(x) = a + bx, \quad w(1) = w(-1) \Longrightarrow w(x) = a$

$\lambda < 0 \Longrightarrow w(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

Einsetzen der Randwerte für w liefert $\lambda = 0 \lor a = b$. Nur letzteres ist möglich.

Einsetzen der Randwerte für w_x mit $a = b$ liefert
$\lambda = 0 \lor a = b = 0 \implies$ Es gibt keine nichttriviale Lösung.

$\lambda > 0 \Longrightarrow w_\lambda(x) = a_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}x) + b_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$w_\lambda(1) = w_\lambda(-1) \Longrightarrow a_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}) = a_\lambda \cos(-\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \sin(-\sqrt{\lambda})$

$\Longrightarrow b_\lambda = 0 \lor \lambda = k^2\pi^2$

$w'_\lambda(1) = w'_\lambda(-1) \Longrightarrow -a_\lambda \sin(\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \cos(\sqrt{\lambda}) = -a_\lambda \sin(-\sqrt{\lambda}) + b_\lambda \cos(-\sqrt{\lambda})$

$\Longrightarrow a_\lambda = 0 \lor \lambda = k^2\pi^2$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für $\lambda = k^2\pi^2$. wir haben dann

$$w_k(x) = a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)$$

Für $k = 0$ hat man die Konstante a_0. Der Fall $\lambda = 0$ kann also hier integriert werden.

Zugehörige Zeitanteile

$\dot{v}_k(t) = -k^2\pi^2 v_k(t) \implies v_k(t) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}$

Jede Funktion $v_k(t) \cdot w_k(x)$ löst die Dgl und erfüllt die Randbedingungen!

Superposition:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) e^{-k^2\pi^2 t}$$

löst die Dgl und erfüllt die Randbedingungen!

Zu erfüllen : Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)) = f(x)$$

Setze f 2-periodisch fort und bestimme die Fourierkoffizienten a_k, b_k der vollen Fourierreihe von f. Mit diesen Koeffizienten hat man dann die Lösung.

Beispiel: $f(x) = 1 - x^2 + \sin(\pi x)$.

Für $k > 0$ erhält man

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big) \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x^2 \cos(k\pi x) dx \\ &= \frac{8}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big) \sin(k\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) \sin(k\pi x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq 1 \\ 1 & k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \big(1 - x^2 + \sin(\pi x)\big)\, dx = 4/3,$$

$$u(x,t) = \frac{2}{3} \; + \; 1 \cdot e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{k^2\pi^2} (-1)^{k+1} \cos(k\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}$$

Symmetrische Differentialoperatoren

Gegeben: eine Menge D **zulässiger Funktionen** versehen mit einem Skalarprodukt sowie einem lineareren Differentialoperator L und homogenen Randbedingungen.

Zum Beispiel:

der Raum der reellwertigen Funktionen aus $D := C^2(a,b) \cap C[a,b]$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$< u, v >:= \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx \,,$$

dem Differentialoperator $\quad L = -\dfrac{d^2}{dx^2}\,,$

und den Randbedingungen $\quad u'(a) = u(a),\, u'(b) = -u(b)\,.$

Vokabeln/Eigenschaften:

- D_0 = Menge der Vergleichsfunktionen
  = Funktionen aus D, die die Randbed'n erfüllen.
- Eigenwert/Eigenfunktionen: $L[v] = \lambda v, \quad v \in D_0 \setminus \{0\}\,.$
  Zum Bsp. $-v'' = \lambda v, v(0) = v(L) = 0$
  $\Longrightarrow \lambda_k = k^2\omega^2, v_k(x) = \sin(k\omega x), \omega = \pi/L$
- Symmetrischer Operator (für reellwertige Fkt'n) :
  $$< Lu, v >=< u, Lv > \qquad \forall v, u \in D_0\,.$$
- Vorlesung: Eigenwerte symmetrischer Operatoren sind reell. Die Eigenfunktionen sind orthogonal zueinander.

Beispiel: Sturm-Liouville Problem für $w = w(x,t)$

$w_t = (p(x)w_x)_x - q(x)w,$

$p \in C^1([0,1]),\, q \in C([0,1]), p \geq \alpha > 0,\, q \geq 0$

$w(0,t) = w(1,t) = 0$

$w(x,0) = f(x)\,.$

Produktansatz: $w(x,t) := u(x) \cdot T(t)$ liefert

$$u \cdot \dot{T} = T \cdot (p \cdot u')' - q \cdot u \cdot T \iff \frac{\dot{T}}{T} = \frac{(p \cdot u')' - q \cdot u}{u} = -\lambda$$

Für x erhalten wir also die Eigenwertaufgabe

$$L[u] := -(p \cdot u')' + q \cdot u \overset{!}{=} \lambda u, \qquad u(0) = u(1) = 0\,.$$

Wir zeigen, dass der Operator $L := -\frac{d}{dx}(p\,\frac{d}{dx}) + q$
für die Vergleichsfunktionen ($v(0) = v(1) = 0$) symmetrisch ist.

$$\begin{aligned}
< Lu, v > &= \int_0^1 -(p\cdot u')'v + quv\,dx = \int_0^1 -(pu')'vdx + \int_0^1 uqv\,dx \\
&= [-pu'\cdot v]_0^1 - \int_0^1 -(pu')\cdot v'dx + \int_0^1 uqv\,dx \\
&= -[-pv'\cdot u]_0^1 - \int_0^1 -(pv')'\cdot udx + \int_0^1 uqv\,dx \\
&= \int_0^1 -((pv')' + qv)\,udx = < u, Lv > \ .
\end{aligned}$$

Konkretes Beispiel: $p(x) = (1+x)^2$, $q(x) = 0$**.**

Eigenwertaufgabe:

$-((1+x)^2\cdot u')' = -(1+x)^2u'' - 2(1+x)u' \stackrel{!}{=} \lambda u$,
$u(0) = u(1) = 0$.

Die Substitution $y = \ln(1+x)$ mit $y'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

liefert für $u(x) = \tilde{u}(y(x) \Longrightarrow$

$u_x = \tilde{u}_y\cdot\dfrac{1}{1+x}$,

$u_{xx} = \tilde{u}_{yy}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2} - \tilde{u}_y\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}$

Neue Dgl. für $\tilde{u}(y)$:

$\tilde{u}'' - \tilde{u}' + 2\tilde{u}' + \lambda\tilde{u} = \tilde{u}'' + \tilde{u}' + \lambda\tilde{u} = 0$.

Eine lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten.

Nullstellen des charakteristische Polynoms für $\lambda > 1/4$

$\mu^2 + \mu + \lambda = 0 \iff \mu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}$

Fundamentalsystem

$\tilde{u}_{1,2}(y) = e^{\left(-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\right)y} = e^{-\frac{y}{2}}\cdot e^{\pm i\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}y}$

reelle allgemeine Lösung:

$\tilde{u}(y) = \tilde{c}_1 e^{-\frac{y}{2}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\,y\right) + \tilde{c}_2 e^{-\frac{y}{2}}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}\,y\right)$

Rücksubstitution

$$u(x) = c_1 e^{\ln(1+x)\cdot(-\frac{1}{2})} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ln(1+x)\right)$$

$$+ c_2(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ln(1+x)\right)$$

$$u(0) = 0 \iff c_1 \frac{1}{\sqrt{1+0}} \sin(0) + c_2 \overset{!}{=} 0 \iff c_2 = 0\,.$$

$$u(1) = c_1 \frac{1}{\sqrt{1+1}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ln(1+1)\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \sqrt{\lambda - \tfrac{1}{4}}\ln(2) = k\pi$$

Wir erhalten also die Eigenwerte

$$\lambda_k - \tfrac{1}{4} = \left(\frac{k\pi}{\ln(2)}\right)^2 \qquad k \in \mathbb{N}$$

und die Eigenfunktionen

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ln(2)} \cdot \ln(1+x)\right)$$

Zugehörige Zeitanteile $T_k(t) = e^{-\lambda_k t} = e^{-\left(\frac{1}{4} + (\frac{k\pi}{\ln(2)})^2\right)t}$

Lösung: $$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(t) u_k(t)$$

Koeffizienten: $$c_k = \frac{< f, u_k >}{< u_k, u_k >}$$

$$< u_k, u_k >= \int_0^1 \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{\ln(2)} \cdot \ln(1+x)\right)}{1+x}\, dx$$

$$= \int_{\ln(1+0)}^{\ln(1+1)} \sin^2\left(\frac{k\pi}{\ln(2)}\phi\right) d\phi = \frac{1}{2}$$

Hinweise zur Aufgabe 4/Andere Ansätze

- Machen Sie einen Produktansatz.
- Lösen Sie erst die gewöhnliche Dgl. für die Zeitvariable.
- Zeigen Sie, dass es keine in der Zeit periodischen Eigenfunktionen gibt.
- Örtliche Dämpfung: e^{-ax}.
- Linear ortsabhängige Phasenverschiebung: sin bzw. cos von $(\alpha t - \beta x)$.
- Ansatz könnte z.B. so aussehen: $u(x,t) = \delta\, e^{-ax} \cos(\alpha t - \beta x)$.