Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 10/11
07.12.2010

Anleitung zu Blatt 4 Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lineare Differentialgleichungssysteme, lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Lineare Differentialgleichungssysteme

Gesucht : **Funktion** $\boldsymbol{y} : D \to \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t)}$$

Lösung der homogenen Aufgabe: siehe letzte Anleitung

Die Menge der Lösungen der homogenen Aufgabe bildet einen linearen Raum.
Dimension des Lösungsraumes $= n$.

$$\boldsymbol{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{y}^{[k]}(t) = \left(\boldsymbol{y}^{[1]}, \quad \boldsymbol{y}^{[2]}, \quad \ldots \quad \boldsymbol{y}^{[n]}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: Y(t) \cdot \boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{Y}(t)$ heißt **Fundamentalmatrix** und die
Funktionen $\boldsymbol{y}^{[1]}, \boldsymbol{y}^{[2]}, \ldots, \boldsymbol{y}^{[n]}$ heißen **Fundamentalsystem**
$\Longleftrightarrow$
Die $\boldsymbol{y}^{[k]}$ sind linear unabhängige Lösungen der homogenen Aufgabe.

Lösung der inhomogenen Aufgabe $\boxed{\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t)}$

Wie im skalaren Fall gilt

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \boldsymbol{y}^{[k]}(t) = \left(\boldsymbol{y}^{[1]}, \quad \boldsymbol{y}^{[2]}, \quad \ldots \quad \boldsymbol{y}^{[n]}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \boldsymbol{y}_p(t)$$

d.h. : Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe = allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe + eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe.

Variation der Konstanten

Im skalaren Fall hatten wir:
Ansatz $\quad y_p = y_h(t)c(t) +$ DGL liefert $\Longrightarrow \; y_h(t) \cdot \dot{c}(t) = h(t)$

Analog gilt bei Systemen
Ansatz $\boxed{\boldsymbol{y}_p(t) := \boldsymbol{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}(t)}$ eingestzt in DGL liefert $\boxed{\boldsymbol{Y}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{h}(t)!}$

Beispiel A:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) := \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t} & \frac{1+t}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \cos(t)(1+t) \\ 1 + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Anleitung kennen wir das Fundamentalsystem $\quad \boldsymbol{Y}(t) := \begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}$.
Variation der Konstanten liefert den Ansatz:

$$\boldsymbol{y}_p(t) := \boldsymbol{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

Dies eingesetzt in das DGL-System ergibt das folgnde Gleichungssystem für $\dot{c}_1, \dot{c}_2$

$$\begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\cos(t)(1+t) \\ 1+\cos(t) \end{pmatrix} .$$

$$\begin{cases} (1+t)\dot{c}_1 + e^t\dot{c}_2 = 1+\cos t + t\cos t \\ \\ \dot{c}_1 + e^t\dot{c}_2 = 1+\cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{c}_1 = \cos t \\ \\ \cos t + e^t\dot{c}_2 = 1+\cos t \end{cases}$$

Wähle z.B. $\boldsymbol{c}_1(t) = \sin t \qquad c_2(t) = -e^{-t}$

$$y_p(t) = \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} - e^{-t} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\sin(t) - 1 \\ \sin(t) - 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+t)\sin(t) - 1 \\ \sin(t) - 1 \end{pmatrix}$$

Lineare DGL-Systeme mit Konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\boldsymbol{y}'(t) = A \cdot \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t) \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ konstant}}$$

Lösung der homogenen Aufgabe: $\boldsymbol{y}(t) = A \cdot \boldsymbol{y}(t)\,.$

Ist λ_k ein Eigenwert von A und $\boldsymbol{v}^{[k]}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so löst

$$\boxed{\boldsymbol{y}^{[k]}(t) := e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v}^{[k]}}$$

das System.

Falls A diagonalisierbar

$\exists$ n linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}, \cdots, \boldsymbol{v}^{[n]}$

$\Longrightarrow \quad e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}^{[1]}, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}^{[2]}, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}^{[n]}$

bildet Fundamentalsystem, wobei nicht notwendig $\lambda_i \neq \lambda_j$

Falls A nicht diagonalisierbar

Es gibt keine n linear unabhängige Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}, \cdots, \boldsymbol{v}^{[n]}$

$\exists \lambda_k : a(\lambda_k) > g(\lambda_k) \Longrightarrow$

bestimme Hauptvektoren Stufe 1 bis Stufe $(a(\lambda_k) - g(\lambda_k)$

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{v}[1] & : & \text{Eigenvektor zum EW } \lambda \\ & & (A-\lambda I)\boldsymbol{v}^{[1]} = 0 \\ \boldsymbol{v}[2] & : & \text{Hauptvektor Stufe 1 zum EW } \lambda,\ \boldsymbol{v}^{[1]} \\ & & (A-\lambda I)\boldsymbol{v}^{[2]} = \boldsymbol{v}^{[1]} \\ \boldsymbol{v}[3] & : & \text{Hauptvektor Stufe 2 zum EW } \lambda,\ \boldsymbol{v}^{[1]},\ \boldsymbol{v}^{[2]} \\ & & (A-\lambda I)\boldsymbol{v}^{[3]} = \boldsymbol{v}^{[2]} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{[1]}(t) &:= e^{\lambda t}\cdot v^{[1]} \qquad \text{wie gehabt} \\ \boldsymbol{y}^{[2]}(t) &:= e^{\lambda t}\left[\frac{t^1}{1!}\cdot v^{[1]} + v^{[2]}\right] \\ \boldsymbol{y}^{[3]}(t) &:= e^{\lambda t}\left[\frac{t^2}{2!}\cdot v^{[1]} + \frac{t^1}{1!}\cdot v^{[2]} + v^{[3]}\right] \\ &\vdots \\ \boldsymbol{y}^{[r]}(t) &:= e^{\lambda t}\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\cdot v^{[1]} + \frac{t^{(r-2)}}{(r-2)!}\cdot v^{[2]} + \ldots + v^{[r-1]}\right] \end{aligned}$$

Wobei $r = a(\lambda)$ und $g(\lambda) = 1$

ACHTUNG: Kettenbedingung beachten:

$$(A-\lambda I)\,\boldsymbol{v}^{[j]} = \boldsymbol{v}^{[j-1]} \qquad j = 2, 3, \cdots, r\,.$$

Beispiel B) Gegeben seien die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie der Vektor} \quad b(t) := \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}(t) = A\,y(t) + b(t)\cdot$$

Eine einfache Rechnung ergibt für das charakteristische Polynom

$p(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)\,.$

Die Matrix A hat also die einfachen reellen Eigenwerte
$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$

Als zugehörige Eigenvektoren erhält man (natürlich bis auf skalare, nichtverschwindende Vielfache):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist also mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$y_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe: Variation der Konstanten oder spezieller Ansatz:

$$y_p(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

an. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL liefert das Gleichungssystem

$$-e^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $a = -\frac{5}{8},\ b = \frac{5}{72},\ c = -\frac{29}{36}$.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist also mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$y(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{72} \\ -\frac{29}{36} \end{pmatrix} .$$

Beispiel C) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y(t).$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Die Eigenwerte sind offensichtlich.
Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -3 : \qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}^{[1]} = c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 : \qquad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}^{[2]} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 : \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}^{[3]} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenvektorrichtungen gibt es nicht. Es gilt $a(5) - g(5) = 1$

Hauptvektor der Stufe 1 zu $\lambda_3 = 5$, $\boldsymbol{v}^{[3]}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}^{[4]} = \boldsymbol{v}^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v}^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (+\tilde{k}\,\boldsymbol{v}^{[3]})$$

Jede Lösung des Systems lässt sich mit geeigneten konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 e^{-3t} \boldsymbol{v}^{[1]} + c_2 e^{-t} \boldsymbol{v}^{[2]} + c_3 e^{5t} \boldsymbol{v}^{[3]} + c_4 e^{5t} (t\, \boldsymbol{v}^{[3]} + \boldsymbol{v}^{[4]})$$

Lineare DGL-Systeme mit komplexen Eigenwerten

Gesucht Lösung der homogenen Aufgabe: $\boldsymbol{y}'(t) = A \cdot \boldsymbol{y}(t),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ist $\lambda = a+ib,\ b \neq 0$ ein komplexer Eigenwert von A und $\boldsymbol{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt für $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}}(t) &:= \lambda\, e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v} \;=\; e^{\lambda t} \cdot A\boldsymbol{v} \;=\; A\, e^{\lambda t}\boldsymbol{v} \;=\; A\,\boldsymbol{y}(t) \\ \Longrightarrow\ \overline{\lambda\, e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v}} &= \overline{Ae^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v}} \Longleftrightarrow \bar{\lambda}\, e^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = A\, e^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \\ \Longrightarrow\ \tfrac{d}{dt}\,(e^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}\,) &= Ae^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \end{aligned}$$

D.h. mit λ ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert und zwar mit zugehörigem Eigenvektor $\bar{\boldsymbol{v}}$.

Komplexe Eigenwerte reeller Matrizen tauchen immer paarweise als $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ auf.

Die zugehörigen Lösungen der DGL sind

$$\tilde{y}^{[1]}(t) = e^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{v}\,, \quad \tilde{y}^{[2]}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{\boldsymbol{v}}\,) = \overline{\tilde{y}^{[1]}(t)}$$

Will man ein reelles Fundamentalsystem, so bildet man

$$\begin{aligned} y^{[1]}(t) &:= \frac{1}{2}\,(\tilde{y}^{[1]}(t) + \tilde{y}^{[2]}(t)) = Re(\tilde{y}^{[1]}(t)) \\ y^{[2]}(t) &:= \frac{1}{2i}\,(\tilde{y}^{[1]}(t) - \tilde{y}^{[2]}(t)) = Im(\tilde{y}^{[1]}(t)) \end{aligned}$$

Beispiel D) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein (reelles) Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.

b) Bestimmen Sie (mittels geeigneter Ansätze) eine partikuläre Lösung und damit auch die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

Lösungsskizze:

a)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)^2 + 9].$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i\,.$$

Zum Eigenwert 1 errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 3 \\ 2 & 1-1 & 2 \\ -3 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \iff \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der zugehörigen Fundamentallösung $\boldsymbol{y}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zum Eigenwert 2-3i errechnet man den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 3i & 0 & 3 \\ 2 & 3i-1 & 2 \\ -3 & 0 & 3i \end{pmatrix} \boldsymbol{w} = 0 \iff \begin{cases} w_3 = -iw_1 \\ 2w_1 + (3i-1)w_2 - 2iw_1 = 0 \\ -3w_1 + 3i(-iw_1) = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Zeile rechnet man $w_2 = \dfrac{2(1-i)w_1}{1-3i}$.

Die Wahl $w_1 := 1 - 3i$ liefert die komplexe Lösung $z(t)$:

$$w = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2-2i \\ -3-i \end{pmatrix} \implies z(t) = e^{(2-3i)t} \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2-2i \\ -3-i \end{pmatrix}$$

$$z(t) = e^{2t}e^{-3it}\begin{pmatrix}1-3i\\2-2i\\-3-i\end{pmatrix} = e^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t))\begin{pmatrix}1-3i\\2-2i\\-3-i\end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(3t) - 3i\cos(3t) - i\sin(3t) - 3\sin(3t)\\2\cos(3t) - 2i\cos(3t) - 2i\sin(3t) - 2\sin(3t)\\-3\cos(3t) - i\cos(3t) + 3i\sin(3t) - \sin(3t)\end{pmatrix}$$

und damit die reellen Lösungen

$$\boldsymbol{y}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(3t) - 3\sin(3t)\\2\cos(3t) - 2\sin(3t)\\-3\cos(3t) - \sin(3t)\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y}_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}-\sin(3t) - 3\cos(3t)\\-2\sin(3t) - 2\cos(3t)\\3\sin(3t) - \cos(3t)\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet
$\boldsymbol{y}_h(t) = c_1\boldsymbol{y}_1(t) + c_2\boldsymbol{y}_2(t) + c_3\boldsymbol{y}_3(t)$.

b) Zur Lösung der inhomogenen Aufgabe lösen wir die zwei Aufgaben:

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}, \text{ bzw. } \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix}0\\0\\e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall machen wir den Ansatz $y_{p,1} = (a,b,c)^T$ und erhalten

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&2\\-3&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$$

mit dem Ergebnis $y_{p,1} = (1,1,-1)^T$.
Im zweiten Fall machen wir den Ansatz $y_{p,2} = e^{2t}(a,b,c)^T$ und erhalten

$$2e^{2t}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&2\\-3&0&2\end{pmatrix}e^{2t}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\e^{2t}\end{pmatrix}$$

mit dem Ergebnis $y_{p,2} = \dfrac{e^{2t}}{3}(1,2,0)^T$
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe lautet

$$\boldsymbol{y}(t) = y_h(t) + y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t)\,.$$

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Für $a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ sei gesucht $y: D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Ist λ_k eine Nullstelle von $P(\lambda)$ mit der Vielfachheit $r_k \geq 1$, so sind

$$t^0 e^{\lambda_k t},\ t^1 e^{\lambda_k t},\ \cdots,\ t^{r_k - 1} e^{\lambda_k t}$$

Lösungen der Differentialgleichung. Mit allen Nullstellen erhält man so ein

Fundamentalsysten : $y^{[1]}(t), \cdots, y^{[n]}(t)$.

Allgemeine Lösung : $y(t) = c_1 y^{[1]}(t) + \cdots + c_n y^{[n]}(t)$.

Beispiel E: Gesucht sei reelle Darstellung der Lösung der RWA

$$y''' + 2y'' + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) y' = 0$$
$$y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1, \ \ y(1) = 1.$$

Lösungsskizze:

Schritt 1: Nullstellen des charakteristischen Ploynoms

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \left(1 + \tfrac{\pi^2}{4}\right)\lambda = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i\frac{\pi}{2}$.

Schritt 2: Komplexes Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = 1$$
$$z_2(t) = e^{(-1+i\frac{\pi}{2})t}$$
$$z_3(t) = e^{(-1-i\frac{\pi}{2})t}$$

Schritt 3: Reelles Fundamentalsystem:

$$y_1(t) = 1$$
$$y_2(t) = e^{-t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$
$$y_3(t) = e^{-t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Schritt 4 : Allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 + e^{-t}\left(c_2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

Schritt 5: Anfangs- und Randwerte

$$y(t) = c_1 + e^{-t}\left(c_2 \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + c_3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$
$$y'(t) = e^{-t}\left((-c_2 + \tfrac{\pi}{2}c_3)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) + (-c_3 - \tfrac{\pi}{2}c_2)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right).$$

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \iff c_2 = -c_1 \\ y(1) &= c_1 + c_3 e^{-1} = 1 \iff c_3 = (1-c_1)e^1 \\ y'(0) &= -c_2 + \frac{\pi}{2}c_3 = c_1 + \frac{\pi}{2}(1-c_1)e^1 = 1 \iff c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung

Gesucht $y : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}$ mit

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(t).$$

Allgemeine Lösung = Allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe + partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe

Partikuläre Lösung im allg. über Variation der Konstanten. Bei speziellen rechten Seiten (Inhomogenitäten h) oft einfacher: spezielle Ansätze.

Inhomogenität	Ansatz
$(\beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n)e^{\alpha t}$ $P(\alpha) \neq 0$	$y_p(t) := (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{\alpha t}$
$\alpha \quad k-$fache Nullstelle von $P(\lambda)$	$y_p(t) := (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)t^k\, e^{\alpha t}$

Beispiel F:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung

$$y''' + y'' = 2.$$

$\lambda^2(\lambda + 1) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

$y_1(t) = e^{0t} = 1, \quad y_2(t) = te^{0t} = t, \quad y_3(t) = e^{-t}$

$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}.$

Ansatz für $y_p = \alpha t^2 \cdot e^0$ eingesetzt in die Dgl. ergibt $2\alpha = 2$.

Also hat man die $y_p = t^2$ und die allgemeine Lösung:

$y(t) = c_1 + c_2 t + t^2 + c_3 e^{-t}$.

Variation der Konstanten: Mit

$$\boldsymbol{y}(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y^{(3)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

ist die DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = h(t)$$

äquivalent mit dem System

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

$$=: A\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{h}(t).$$

Das Fundamentalsystem der Dgl. n-ter Ordnung

$$y^{[1]}(t), \cdots, y^{[n]}(t)$$

entspricht dann folgendem Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\begin{pmatrix} y^{[1]}(t) & y^{[2]}(t) & \cdots & y^{[n]}(t) \\ (y^{[1]})'(t) & (y^{[2]})'(t) & \cdots & (y^{[n]})'t) \\ (y^{[1]})''(t) & (y^{[2]})''(t) & \cdots & (y^{[n]})''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y^{[1]})^{(n-1)}(t) & (y^{[2]})^{(n-1)}(t) & \cdots & (y^{[n]})^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel G:

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 2t^3e^{-t}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$$

Allgemeine Lösung

$$y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t}$$

Ansatz für y_p wäre

$$y_p(t) = t^3(at^3 + bt^2 + ct + d)e^{-t}$$

Einsetzen in DGL nicht sehr angenehm.

Alternative: Variation der Konstanten:

Bei Systemen hatten wir :
$\boldsymbol{y}_p(t) := \boldsymbol{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}(t) +$ DGL liefert $\Longrightarrow \boldsymbol{Y}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \boldsymbol{h}(t)!$

Hier haben wir als zugehöriges Fundamentalsystem:

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} y^{[1]} & y^{[2]} & y^{[3]} \\ (y^{[1]})' & (y^{[2]})' & (y^{[3]})' \\ (y^{[1]})'' & (y^{[2]})'' & (y^{[3]})'' \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & t^2e^{-t} \\ -e^{-t} & (te^{-t})' & (t^2e^{-t})' \\ e^{-t} & (te^{-t})'' & (t^2e^{-t})'' \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist $\boldsymbol{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}'(t) = (0, 0, h(t))^T$ also

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & t^2e^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} & (2t-t^2)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-2)e^{-t} & (t^2-4t+2)e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2t^3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1' \quad &+ tc_2' & &+ t^2c_3' &&= 0\,, \\ -c_1' \quad &+ c_2' - tc_2' & &+ 2tc_3' - t^2c_3' &&= 0\,, \\ c_1' \quad &-2\,c_2' + tc_2' & +2c_3' &- 4tc_3' + t^2c_3' &&= 2t^3 \end{aligned}$$

Also $\quad c_3' = t^3, \qquad c_2' = -2\,t^4, \qquad c_1' = t^5$

und damit $c_3 = \dfrac{1}{4}\,t^4, \qquad c_2 = -\dfrac{2}{5}\,t^5, \qquad c_1 = \dfrac{1}{6}\,t^6$

und $y_p(t) = e^{-t}(c_1 + c_2t + c_3t^2) = \dfrac{1}{60}\,t^6$.