Brückenkurs ANA I und LA I im WS 06/07
Heiko Remling LA I,
Diana Kaminski ANA I
Fabian Schulte-Hengesbach

ANALYSIS I
01. März 2007

6. Differenzierbare Abbildungen

AUFGABE 1: Differenzenquotient

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen direkt aus der Definition der Ableitung.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$
c) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

AUFGABE 2: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Man betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}) & \text{für} \quad \mathrm{x} \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad \mathrm{x} = 0. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind für $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_1 in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_2 in $x = 0$ einmal differenzierbar, aber die Ableitung in $x = 0$ nicht stetig, sowie nicht differenzierbar ist.

c) Zusatz: Ist die Funktion f_3 in x = 0 zweimal differenzierbar?

AUFGABE 4: Ableitungsregeln

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$a)$ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (für $\|x\| < 1$)	$f)$ $Zusatz: \ln\|x\|$ (für $x \neq 0$)
$b)$ $\sqrt[x]{x}$ (für $x > 0$)	$g)$ $Zusatz: (\sin(x^2))^2$ (für $x \in \mathbb{R}$)
$c)$ $\|x\|^3$ (für $x \in \mathbb{R}$)	$h)$ $Zusatz: \sum_{k=0}^{\infty} 2k^2 x^k$
$d)$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2k! x^k$	$i)$ $Zusatz: (\cos(\frac{(x^2-2)\pi}{5}))^a$ (für $a \in \mathbb{R}_+$)
$e)$ $Zusatz: \ln(\frac{1}{x})$ (für $x > 0$)	

AUFGABE 5:

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) Hauptzweig des Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
b) arcsinh: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
c) Zusatz: $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

AUFGABE 6: Grenzwerte von Funktionen

Berechnen Sie die Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital.

a) $\lim_{x\to 0} x \ln(x)$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x}$

c) $\lim_{x\to 0} x(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))$

d) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

AUFGABE 7: Kriterium für Extrema

Man zeige, dass fr $n \in \mathbb{N}$ die durch

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ im Punkt $x = n$ ein striktes, globales Maximum hat.

AUFGABE 8: Kriterium für Konstanz

Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung von arctan, indem Sie die Potenzreihenentwicklung seiner Ableitung $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ hinschreiben und die Potenzreihe erraten, deren gliedweise Ableitung mit der Ableitung von arctan identisch ist.

SELBSTTEST:

1. Wie ist die Ableitung einer Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert und welche äquivalente Definitionen gibt es?
2. Wie kann man die erste und zweite Ableitung einer Funktion geometrisch interpretieren?
3. Nennen Sie eine Funktion, die in einem Punkt stetig aber nicht differenzierbar ist.
4. Was versteht man unter der gliedweisen Ableitung von Potenzreihen?
5. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Grenzfunktion einer Folge von stetig differenzierbaren Funktionen wieder stetig differenzierbar ist?
6. Welche Vorraussetzung erfordert die Anwendung der Regel von de l'Hospital?
7. Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für eine Extremalstelle.
8. Was besagt der Mittelwertsatz? Nennen Sie Anwendungen.